Mérnökinformatikus BSc, Valószínűségszámítás 3. vizsga

1. Egy alkalommal egy szolgáltató egység hibás számlakivonatokat küld ki az ügyfeleinek. A tapasztalat azt mutatja, hogy az emberek 65%-a nézi át a számára elküldött számlakivonatokat, 35%-uk nem nézi át őket. Ha egy ember átnézi a számlakivonatot, akkor 0.55 valószínűséggel találja meg a benne rejlő hibát, ha nem nézi át, akkor biztosan nem találja meg a benne rejlő hibát.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy ember megtalálja a számára küldött számlakivonatban a hibát?
b) Feltéve, hogy az ember nem találja meg a hibát a számlakivonatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem nézte át a kivonatot?
Megoldás: A : átnézi a számlakivonatot, $\bar{A}$: nem nézi át a számlakivonatot, $A, \bar{A}$ teljes eseményrendszert alkotnak,
$\mathbf{P}(A) = 0.65, \mathbf{P}(\bar{A}) = 0.35, E$: észreveszi a hibát. $\mathbf{P}(E \mid A) = 0.55, \mathbf{P}(E \mid \bar{A}) = 0.$

a.) $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(E \mid A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(E \mid \bar{A})\mathbf{P}(\bar{A}) = 0.55 \cdot 0.65 = 0.3575$

b.) $\mathbf{P}(\bar{A} \mid \bar{E}) = \dfrac{\mathbf{P}(\bar{E} \mid \bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})}{\mathbf{P}(\bar{E})} = \dfrac{1 \cdot 0.35}{1 - 0.3575} = 0.54475$

2. Szabályos kockákkal gurítunk. Minek nagyobb a valószínűsége: hat kockával gurítva legalább az egyik gurítás hatos, vagy 12 kockával gurítva legalább két gurítás hatos, vagy 18 gurítás esetén legalább 3 gurítás hatos?
Megoldás: Legyen X_6 a dobott hatosok száma, ha 6 kockával dobunk, X_{12} a dobott hatosok száma, ha 12 kockával dobunk, és X_{18} a dobott hatosok száma, ha 18 kockával dobunk.
$X_6 \in B(6, \frac{1}{6}), X_{12} \in B(12, \frac{1}{6}), X_{18} \in B(18, \frac{1}{6})$.
$\mathbf{P}(X_6 \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X_6 = 0) = 1 - (\frac{5}{6})^6 = 0.6651$
$\mathbf{P}(X_{12} \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X_{12} = 0) - \mathbf{P}(X_{12} = 1) = 1 - (\frac{5}{6})^{12} - 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{11} = 0.61867$
$\mathbf{P}(X_{18} \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(X_{18} = 0) - \mathbf{P}(X_{18} = 1) - \mathbf{P}(X_{18} = 2) =$
$= 1 - (\frac{5}{6})^{18} - 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^{17} - \binom{18}{2} \cdot (\frac{1}{6})^2 \cdot (\frac{5}{6})^{16} = 0.59735.$
Annak a legnagyobb a valószínűsége, hogy hat kockával dobva legalább 1 hatost dobunk.

3. A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!
Megoldás: Az egy versenyzőben megtalált kullancsok száma X Poisson eloszlású.
$n \cdot \mathbf{P}(X = 1) = n \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = 300, n \cdot \mathbf{P}(X = 2) = n \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda} = 75$
$\frac{300}{75} = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 300 \cdot 2 \cdot e^{0.5} = 989.23 \Rightarrow$ Kb. 989-990 versenyző indult.

4. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.
Megoldás: $\mathbf{E}X_i = \mathbf{\sigma}X_i = 5, \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i = \bar{X}, \frac{\bar{X}-5}{5} \cdot 10 = 2\bar{X} - 10 \approx N(0,1)$ a centrális határeloszlás tétel szerint:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 525\right) = \mathbf{P}(\bar{X} > 5.25) = 1 - \mathbf{P}(\bar{X} < 5.25) =$$

$$= 1 - \mathbf{P}(2\bar{X} - 10 < 2 \cdot 5.25 - 10) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

5. Számolja ki az $f_X(x) = 1,\ x \in [0,1]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5},\ y \in [2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!
Megoldás: $f_{X+Y}(t) = \displaystyle\int_{\max\{0,t-3\}}^{\min\{1,t-2\}} \frac{2}{5}(t-u)\,\mathrm{d}u.$

a.) $t \in (2,3)$: $f_{X+Y}(t) = \displaystyle\int_0^{t-2} \frac{2}{5}(t-u)\,\mathrm{d}u = \frac{t^2}{5} - \frac{4}{5};$

b.) $t \in (3,4)$: $f_{X+Y}(t) = \displaystyle\int_{t-3}^{1} \frac{2}{5}(t-u)\,\mathrm{d}u = \frac{8}{5} - \frac{t^2}{5} + \frac{2t}{5}.$

6^{IMSC}. Négy ember beszáll egy liftbe a földszinten. Egymástól függetlenül választanak cél-állomást az épület tíz emelete közül, egyenletes eloszlással. Határozzuk meg a lift megállásai számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Legyen a megállások száma X. $R_X = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbf{P}(X=1) = \frac{10}{10^4} = \frac{1}{1000}$$

$$\mathbf{P}(X=2) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{9}{1} + \binom{10}{2}\cdot\binom{4}{2}}{10^4} = \frac{63}{1000}$$

$$\mathbf{P}(X=3) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{9}{2}\cdot 2}{10^4} = \frac{54}{125}$$

$$\mathbf{P}(X=4) = \frac{\binom{10}{4}\cdot 4!}{10^4} = \frac{63}{125}$$

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{1000} + 2\cdot\frac{63}{1000} + 3\cdot\frac{54}{125} + 4\cdot\frac{63}{125} = \frac{3439}{1000} = 3.439$$

$$\mathbf{E}X^2 = \frac{1}{1000} + 4\cdot\frac{63}{1000} + 9\cdot\frac{54}{125} + 16\cdot\frac{63}{125} = \frac{2441}{200}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 X = \frac{2441}{200} - \left(\frac{3439}{1000}\right)^2 = \frac{378\,279}{1000\,000} = 0.378279$$