V2 A csoport megoldás

1. Ketten azt játszák, hogy dobókockákat feldobnak, és ha a számok összege osztható 4-gyel, akkor X fizet Y-nak, különben Y fizet X-nek. Ha két kockával játszanak, és X 75 Ft-ot fizet, akkor mennyit fizessen Y X-nek, hogy a játék méltányos legyen?

Megoldás: A játék akkor méltányos, ha a nyeremény várható értéke mindkettőjüknek ugyanannyi, és mivel egymásnak fizetnek, ez nulla. Annak valószínűségét, hogy a dobott számok összege 4-el osztható, a kedvező/összes képlettel számolhatjuk. Az összes esetek száma 36, a kedvezőké pedig (amikor az összeg osztható 4-gyel) 9. Ha Y α forintot fizet, akkor X nyereményének várható értéke:

$$\alpha \cdot \frac{3}{4} - 75\frac{1}{4} = 0,$$

amiből $\alpha = 25$ Ft.

2. Egy nagyvárosban naponta átlagosan 3 baleset történik.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy nap nincs baleset?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy három nap mindegyikén 2 baleset van?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy három nap alatt 6 baleset van?

Megoldás: a.) Az egymástól függetlenül bekövetkező balesetek száma általában Poisson eloszlásúnak tekinthető. Egy napra a várható érték 3, ezért

$$\mathbf{P}(\text{balesetek száma} = 0) = \frac{3^0}{0!}e^{-3} \approx 0.04978$$

b.) A Poisson eloszlásról tudjuk, hogy az egymást kizáró tartományokban felvett értékek egymástól függetlenek, azaz az egyes napokon bekövetkező balesetek száma független a többi napokon bekövetkezett balesetek számától.

$$\mathbf{P}(\text{3 nap mindegyikén 2 baleset}) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} = \frac{729}{8} \cdot e^{-9} \approx 0.011246$$

c.) Ha az egy nap alatt bekövetkező balesetek száma Poisson eloszlást követ 3 várható értékkel, akkor a Poisson eloszlás tulajdonságaiból következik, hogy a három nap alatt bekövetkező balesetek száma is Poisson eloszlást követ $3 \cdot 3 = 9$ várható értékkel.

$$\mathbf{P}(\text{balesetek száma} = 6) = \frac{9^6}{6!} \cdot e^{-9} \approx 0.09109$$

3. Egy szerecsendió szállítmányban a belőle vett minta alapján a szemek átlagos tömege 5 gr, és 5%-uk több, mint 6 gr.
a.) Mennyi a szemek tömegének szórása, ha a tömeg normálisnak tekinthető?
b.) A diókat kettesével csomagolják találomra kiválasztva a diókat. Mennyi lesz egy-egy csomag tömegének várható értéke és szórása?
c.) A szállítmány egyik dobozában összesen 200 dió van. Mennyi a valószínűsége, hogy a diók össztömege meghaladja az 1002 gr-ot?

Megoldás: a.) Jelölje X egy dió tömegét.

$$\mathbf{P}(X > 6) = 1 - \mathbf{P}(X \le 6) = 1 - \mathbf{P}(X = 6) - \mathbf{P}(X < 6) = 1 - 0 - F_X(6) = 1 - \Phi\left(\frac{6-5}{\sigma}\right) = 0{,}05$$

$\Phi(1{,}645) = 0{,}95$, így $\frac{1}{\sigma} = 1{,}645$, amiből $\sigma = \frac{1}{1.645} = 0.6079$.

b.) A csomag tömegének várható értéke 10 gr. Az egybecsomagolt két dió tömege függetlennek tekinthető, így a csomag tömegének szórásnégyzete $\boldsymbol{\sigma}^2(X) + \boldsymbol{\sigma}^2(X) = 2 \cdot 0.6079^2 = 0.73908$, a szórás pedig $\sqrt{0.73908} = 0.85970$.

c.) Jelölje X_i az i-edik dió tömegét. A keresett valószínűség

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i > 1002\right)$$

A centrális határeloszlástételt alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i > 1002\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} X_i - 200 \cdot 5}{\sqrt{200} \cdot 0{,}68} > \frac{1002 - 200 \cdot 5}{\sqrt{200} \cdot 0{,}68}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{1002 - 200 \cdot 5}{\sqrt{100} \cdot 0.68}\right) = 1 - \Phi(0.29) = 1 - 0.6141 = 0.3859$$

4. Legyenek $X,Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{1}{X+Y}$. Határozzuk meg Z sűrűségfüggvényét.
Megoldás: $W = X+Y$ sűrűségfüggvénye a konvolúciós képlettel számolható:

$$f_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du = \int_{\max\{0,t-1\}}^{\min\{1,t\}} du = \begin{cases} t & \text{, ha } t \in (0,1) \\ 2-t & \text{, ha } t \in [1,2) \end{cases}$$

Z sűrűségfüggvénye a W sűrűségfüggvényéből határozható meg:

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}\left(W > \frac{1}{t}\right) = 1 - F_W\left(\frac{1}{t}\right), t \in \left(\frac{1}{2},\infty\right)$$

$$f_Z(t) = \frac{1}{t^2} f_W\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{, ha } t \in (1,\infty) \\ 2\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} & \text{, ha } t \in [\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

5. Legyenek X és Y függetlenek, melyek $1,2,3$ és 4 értéket vesznek fel rendre $0.1, 0.2, 0.3$ és 0.4 valószínűséggel. Adjuk meg $X+Y$ eloszlását! Mennyi $F_{X+Y}(\pi)$ és $\boldsymbol{\sigma}^2(X+Y)$?
Megoldás: $R_{X+Y} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

i	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{P}(X+Y=i)$	0.01	0.04	0.1	0.2	0.25	0.24	0.16

$F_{X+Y}(\pi) = \mathbf{P}(X+Y<\pi) = \mathbf{P}(X+Y=2) + \mathbf{P}(X+Y=3) = 0.05$
$\boldsymbol{\sigma}^2(X+Y) = 2\boldsymbol{\sigma}^2(X), \mathbf{E}X = 0.1+0.4+0.9+1.6 = 3, \mathbf{E}X^2 = 0.1+0.8+2.7+6.4 = 10$
$\boldsymbol{\sigma}^2(X) = 10-9 = 1.$ Tehát $\boldsymbol{\sigma}^2(X+Y) = 2.$

6. IMSC Legyen $X = \min\{U,V\}$, $Y = \max\{U,V\}$, ahol U és V függetlenek és egyenletes eloszlásúak [0,1]-en. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlásfüggvényét:
a.) X b.) $1-Y$ c.) $Y-X$
Megoldás: a.) $F_X(t) = 1 - \mathbf{P}(U \geq t, V > t) = 1 - (\mathbf{P}(U \geq t))^2 = 1-(1-F_U(t))^2, t \in (0,1).$
$F_X(t) = 1-(1-t)^2 = 2t - t^2, t \in (0,1).$
b.) $F_{1-Y}(t) = \mathbf{P}(1-Y<t) = \mathbf{P}(1-t<Y) = 1-\mathbf{P}(Y \leq 1-t) =$
$= 1 - \mathbf{P}(U \leq 1-t, V \leq 1-t) = 1-(F_U(1-t))^2, t \in (0,1)$
$F_{1-Y}(t) = 1-(1-t)^2 = 2t-t^2, t \in (0,1).$ (X-nek és $1-Y$-nak ugyanaz az eloszlása...)
c.) $F_{Y-X}(t) = \mathbf{P}(\max\{U,V\} - \min\{U,V\} < t) = \mathbf{P}(|V-U| < t) = 1-(1-t)^2, t \in (0,1).$
$Y-X$-nek is ugyanaz az eloszlása...

V2 B csoport megoldás

1. Ketten azt játszák, hogy dobókockákat feldobnak, és ha a számok összege osztható 3-mal, akkor X fizet Y-nak, különben Y fizet X-nek. Ha két kockával játszanak, és X 50 Ft-ot fizet, akkor mennyit fizessen Y X-nek, hogy a játék méltányos legyen?
Megoldás: A játék akkor méltányos, ha a nyeremény várható értéke mindkettőjüknek ugyanannyi, és mivel egymásnak fizetnek, ez nulla. Annak valószínűségét, hogy a dobott számok összege osztható 3-mal, a kedvező/összes képlettel számolhatjuk. Az összes esetek száma 36, a kedvezőké pedig (amikor az összeg osztható 3-mal) 12. Ha Y α forintot fizet, akkor X nyereményének várható értéke:

$$\alpha \cdot \frac{2}{3} - 50\frac{1}{3} = 0,$$

amiből $\alpha = 25$ Ft.

2. Egy nagyvárosban naponta átlagosan 4 baleset történik.
a.) Mennyi a valószínűsége, hogy egy nap nincs baleset?
b.) Mennyi a valószínűsége, hogy három nap mindegyikén 3 baleset van?
c.) Mennyi a valószínűsége, hogy három nap alatt 5 baleset van?
Megoldás: a.) Az egymástól függetlenül bekövetkező balesetek száma általában Poisson eloszlásúnak tekinthető. Egy napra a várható érték 3, ezért

$$\mathbf{P}(\text{balesetek száma} = 0) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} \approx 0{,}018316$$

b.) A Poisson eloszlásról tudjuk, hogy az egymást kizáró tartományokban felvett értékek egymástól függetlenek, azaz az egyes napokon bekövetkező balesetek száma független a többi napokon bekövetkezett balesetek számától.

$$\mathbf{P}(\text{3 nap mindegyikén 3 baleset}) = \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} \cdot \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} \cdot \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} = \frac{4^9}{216} \cdot e^{-12} \approx 0.0074568$$

c.) Ha az egy nap alatt bekövetkező balesetek száma Poisson eloszlást követ 4 várható értékkel, akkor a Poisson eloszlás tulajdonságaiból következik, hogy a három nap alatt bekövetkező balesetek száma is Poisson eloszlást követ $3 \cdot 4 = 12$ várható értékkel.

$$\mathbf{P}(\text{balesetek száma} = 5) = \frac{12^5}{5!} \cdot e^{-12} \approx 0{,}012741$$

3. Egy szerecsendió szállítmányban a belőle vett minta alapján a szemek átlagos tömege 6 gr, és 8%-uk több, mint 10 gr.
a.) Mennyi a szemek tömegének szórása, ha a tömeg normálisnak tekinthető?
b.) A diókat kettesével csomagolják találomra kiválasztva a diókat. Mennyi lesz egy-egy csomag tömegének várható értéke és szórása?
c.) A szállítmány egyik dobozában összesen 100 dió van. Mennyi a valószínűsége, hogy a diók össztömege meghaladja az 605 gr-ot?
Megoldás: a.) Jelölje X egy dió tömegét.

$$\mathbf{P}(X > 10) = 1 - \mathbf{P}(X \le 10) = 1 - \mathbf{P}(X = 10) - \mathbf{P}(X < 10) = 1 - 0 - F_X(10) = 1 - \Phi\left(\frac{10-6}{\sigma}\right) = 0{,}08$$

$\Phi(1{,}41) = 0{,}92$, így $\frac{4}{\sigma} = 1{,}41$, amiből $\sigma = \frac{4}{1.41} = 2.8369$.
b.) A csomag tömegének várható értéke 12 gr. Az egybecsomagolt két dió tömege függetlennek tekinthető, így a csomag tömegének szórásnégyzete $\sigma^2(X) + \sigma^2(X) = 2 \cdot 2.8369^2 = 16.096$, a szórás pedig $\sqrt{16.096} = 4.0120$.
c.) Jelölje X_i az i-edik dió tömegét. A keresett valószínűség

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 605\right)$$

A centrális határeloszlástételt alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 605\right) = \mathbf{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot 6}{\sqrt{100} \cdot 4.0120} > \frac{605-600}{40.012}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{605-600}{40.012}\right) = 1 - \Phi(0.12496) = 1 - 0.5478 = 0.4522$$

4. Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek és $Z = \frac{1}{X+2Y}$. Határozzuk meg Z sűrűségfüggvényét.
Megoldás: $W = X + 2Y$ sűrűségfüggvénye a konvolúciós képlettel számolható:

$$f_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_{2Y}(t-u)\,du = \int_{\max\{0,t-2\}}^{\min\{1,t\}} du = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{ha } t \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{ha } t \in [1,2) \\ \frac{3-t}{2} & \text{ha } t \in [2,3) \end{cases}$$

Z sűrűségfüggvénye a W sűrűségfüggvényéből határozható meg:

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}\left(W > \frac{1}{t}\right) = 1 - F_W\left(\frac{1}{t}\right), t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$f_Z(t) = \frac{1}{t^2} f_W\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2t^3} & \text{ha } t \in (0,1) \\ \frac{1}{2t^2} & \text{ha } t \in [1,2) \\ \frac{3-\frac{1}{t}}{2t^2} & \text{ha } t \in [2,3) \end{cases}$$

5. Legyenek X és Y függetlenek, melyek $1,2,3$ és 4 értéket vesznek fel rendre $0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}2$ és $0{,}1$ valószínűséggel. Adjuk meg $X+Y$ eloszlását! Mennyi $F_{X+Y}(e)$ és $\sigma^2(X+Y)$?
Megoldás: $R_{X+Y} = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

i	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{P}(X+Y=i)$	0.16	0.24	0.25	0.2	0.1	0.04	0.01

$F_{X+Y}(e) = \mathbf{P}(X+Y < e) = \mathbf{P}(X+Y = 2) = 0.16$

$\sigma^2(X+Y) = 2\sigma^2(X), \mathbf{E}X = 0.4+0.6+0.6+0.4 = 2, \mathbf{E}X^2 = 0.4+1.2+1.8+1.6 = 5$
$\sigma^2(X) = 5-4 = 1.$ Tehát $\sigma^2(X+Y) = 2.$

6. IMSC Legyen $X = \min\{U,V\}$, $Y = \max\{U,V\}$, ahol U és V függetlenek és egyenletes eloszlásúak [0,1]-en. Határozzuk meg az alábbi változók eloszlásfüggvényét: a.) Y b.) $1-X$ c.) $Y+X$
Megoldás: a.) $F_Y(t) = \mathbf{P}(U<t, V<t) = (\mathbf{P}(U<t))^2 = t^2, t \in (0,1).$
b.) $F_{1-X}(t) = \mathbf{P}(1-X<t) = \mathbf{P}(1-t<X) = \mathbf{P}(U>1-t, V>1-t) = 1-(F_U(1-t))^2, t \in (0,1)$
$F_{1-X}(t) = 1-(1-t)^2 = 2t-t^2, t \in (0,1).$

c.) $F_{Y+X}(t) = \mathbf{P}(\max\{U,V\}+\min\{U,V\} < t) = \mathbf{P}(U+V<t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \frac{t^2}{2} & t \in [0,1) \\ 2t - \frac{t^2}{2} - 1 & t \in [1,2) \\ 1 & t \ge 2 \end{cases}.$