Mérnökinformatikus BSc
Valószínűségszámítás vizsga
2016. december 22.

1. Egy dobozban 20 db golyó van, amelyek közül 5 piros, a többi fehér színű. Véletlenszerűen választva kiveszünk egyszerre 3 golyót. Jelölje az X valószínűségi változó a piros golyók számát a mintában.
a) Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában lesz legalább egy piros golyó?
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb egy piros golyó lesz?

Megoldás: a.) $R_X = \{0,1,2,3\}, \mathbf{P}(X = i) = \frac{\binom{5}{i}\cdot\binom{15}{3-i}}{\binom{20}{3}}$,

$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{91}{228}, \mathbf{P}(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{35}{76}, \mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{5}{38}$,

$\mathbf{P}(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{15}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{114}, \mathbf{E}X = \frac{35}{76} + \frac{10}{38} + \frac{3}{114} = \frac{3}{4}$,

$\mathbf{E}X^2 = \frac{35}{76} + \frac{20}{38} + \frac{9}{114} = \frac{81}{76}, \sigma^2 X = \frac{81}{76} - \frac{9}{16} = \frac{153}{304}$,

$\sigma X = \sqrt{\frac{153}{304}} = 0.70943$

$\left(\mathbf{E}X = 3\cdot\frac{5}{20} = 0.75, \sigma X = \sqrt{3\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} = 0.70943\right)$

b.) $\mathbf{P}(X \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{137}{228} = 0.60088$

c.) $\mathbf{P}(X \leq 1) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{49}{57} = 0.85965$

2. Egy számítógépgyár 3 távol-keleti cégtől szerzi be ugyanazt az alaplapot: egy kínai, egy tajvani és egy koreai cégtől. A kínai beszállítótól az alaplapok 45%-át, melyek 0,5%-a hibás, a tajvani cégtől az alaplapok 30%-át, melyből minden 100-dik hibás. A maradék alaplapokat a koreai cég gyártja 3,5%-os hibaaránnyal. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) egy alaplapot véletlenszerűen kiválasztva, az jó;
b) az alaplap jó, feltéve, hogy kínai a beszállító;
c) nem koreai az alaplap, feltéve, hogy jó;
d) jó az alaplap, feltéve, hogy nem koreai?

Megoldás: a.) $\mathbf{P}(J) = \mathbf{P}(J \mid K)\cdot\mathbf{P}(K) + \mathbf{P}(J \mid T)\cdot\mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(J \mid C)\cdot\mathbf{P}(C) =$
$= 0.995\cdot 0.45 + 0.99\cdot 0.3 + 0.965\cdot 0.25 = 0.986$

b.) $\mathbf{P}(J \mid K) = 0.995$ c.) $\mathbf{P}(\bar{C} \mid J) = \frac{\mathbf{P}(J|K)\cdot\mathbf{P}(K)+\mathbf{P}(J|T)\cdot\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(J)} = \frac{0.995\cdot 0.45+0.99\cdot 0.3}{0.986} = 0.75532$

d.) $\mathbf{P}(J \mid \bar{C}) = \frac{\mathbf{P}(JK)+\mathbf{P}(TJ)}{\mathbf{P}(K)+\mathbf{P}(T)} = \frac{0.995\cdot 0.45+0.99\cdot 0.3}{0.75} = 0.993$

3. Legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [0, 1] intervallumon. Határozzuk meg az XY szorzatként előálló új változó sűrűségfüggvényét.

Megoldás: $Z = XY$. Legyen $t \in (0,1)$. A $\mathbf{P}(XY < t)$ megegyezik az egységnégyzet $y = \frac{t}{x}$ hiperbolája alá eső pontok tartományának területével.

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(XY < t) = t + t\int_t^1 \frac{1}{x}dx = t + t\cdot(\ln 1 - \ln t) = t - t\ln t$$

$$f_Z(t) = 1 - \ln t - 1 = \ln\frac{1}{t}, t \in (0,1)$$

4. Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

Megoldás: Jelölje Z_i azt a számot, ahányszor i-t dobunk az n-szeres sorozatban.

$\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_6) \in Pol(n, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}), X = Z_1, Y = Z_2, X, Y \in B(n, \frac{1}{6})$.

Tudvalevő, hogy

$$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = \operatorname{cov}(X, Y) = -n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Így

$$\mathrm{R}(X, Y) = \frac{-\frac{n}{36}}{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = -\frac{1}{5}$$

5. Az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.25(1 + xy(x^2 - y^2)), & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Számolja ki a vetületi sűrűségfüggvényeket! Függetlenek X és Y?

Megoldás: $f_X(x) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} 1 + x^3 y - xy^3 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \left[y + x^3 \frac{y^2}{2} - x \frac{y^4}{4} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}; x \in (-1, 1)$

$f_Y(y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} 1 + x^3 y - xy^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \left[x + \frac{x^4}{4} y - \frac{x^2}{2} y \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2};$

A vetületi eloszlások egyaránt $U(-1, 1)$ eloszlások! X, Y nem függetlenek, mivel $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x, y)$.

6^{IMSC}. Legyenek $X, Y \in N(0, 1)$ függetlenek és $Z = 3 - 2X + 5Y, V = 5 + 3X.$ Adja meg az $\mathbf{E}(V \mid Z)$ regressziót és az $f_{Z,V}(z, v)$ együttes sűrűségfüggvényt.

Megoldás: $Z \in N\left(3, \sqrt{29}\right), V \in N(5, 3), \operatorname{cov}(Z, V) = -6, \mathrm{R}(Z, V) = \frac{-2}{\sqrt{29}}.$

V és Z együttes eloszlása normális, együttes sűrűségfüggvényük:

$$f_{Z,V}(z, v) = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{29}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\left(1 - \frac{4}{29}\right)} \left(\frac{(z-3)^2}{29} + \frac{4}{\sqrt{29}} \frac{(z-3)(v-5)}{3 \cdot \sqrt{29}} + \frac{(v-5)^2}{9} \right)}$$

A közöttük lévő regressziós összefüggés lineáris:

$\mathbf{E}(V \mid Z) = \frac{\operatorname{cov}(Z,V)}{\sigma^2 Z}(Z - \mathbf{E}Z) + \mathbf{E}V = -\frac{6}{29}(Z - 3) + 5 = \frac{163}{29} - \frac{6}{29} Z$