A. csoport

1. Két telefon van az irodában, éppen mindkettőn beszélnek. Bálint átlagosan 5 percig szokott beszélni, Dénes 3 percig. Legyen X és Y az a valószínűségi változó, amely azt mondja meg, hogy mostantól hány perc múlva fejezi be Bálint, illetve Dénes a beszélgetést. Mennyi a valószínűsége, hogy Bálint előbb fejezi be a beszélgetést, mint Dénes? (A beszélgetés ideje exponenciális eloszlású).

Megoldás: Az X és Y független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, így együttes sűrűségfüggvényük:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y}, x,y > 0$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(X < Y) = \iint\limits_{x<y} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty\int_x^\infty \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y}dydx =$$

$$\frac{1}{15}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{5}x}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{3}y}dydx = \frac{1}{15}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{5}x}\left[-3e^{-\frac{1}{3}y}\right]_x^\infty dx =$$

$$\frac{1}{15}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{5}x}\cdot 3\cdot e^{-\frac{1}{3}x}dx = \frac{1}{5}\int_0^\infty e^{-\frac{8}{15}x}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{15}{8} = \frac{3}{8}$$

2. A menzán kétféle menüből, az A és B jelűből lehet választani. Ma olyan az ebéd, hogy a tapasztalatok szerint a diákoknak kb. a 20 százaléka választja az A menüt. Ebből már csak 16 adag van, a B-ből még 60. Még 70 ember van hátra.
a.) Mennyi a pontos valószínűsége, hogy mindenki kaphat olyat, amilyet szeretne? (Csak a képletet írja fel).
b.) Normális eloszlással közelítve, milyen eredményt kapunk?

Megoldás: a.) Mindenki azt kap, amit szeretne, ha az A menüt választók száma legalább 10 és legfeljebb 16. A hátralévő 70 ember egymástól függetlenül 20 százalék valószínűséggel választ A menüt, így az A menüt választók száma a 70-ből binomiális eloszlású.

$$\mathbf{P}(10 \le \text{az A menüt választók száma} \le 16) = \sum_{k=10}^{16}\binom{70}{k}\cdot 0.2^k\cdot 0.8^{70-k} \approx 0.69193$$

b.) Ha X jelöli az A menüt választók számát, akkor $\mathbf{E}X = 14, \sigma X = \sqrt{11.2} = 3.3466.$ A Moivre-Laplace tétel szerint X standardizáltja jól közelíti a standard normális eloszlást:

$$\frac{X-14}{3.3466} \approx N(0,1)$$

Így

$$\mathbf{P}(10 \le X \le 16) = \mathbf{P}\left(\frac{10-14}{3.3466} \le \frac{X-14}{3.3466} \le \frac{16-14}{3.3466}\right) = \mathbf{P}\left(-1.1952 \le \frac{X-14}{3.3466} \le 0.59762\right) =$$

$$\approx \Phi(0.59762) - \Phi(-1.1952) = \Phi(0.59762) + \Phi(1.1952) - 1 =$$

$$= 0.7257 + 0.8849 - 1 \approx 0.6106$$

3. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása a következő:

$\diagdown$ X / Y $\diagdown$	-1	0	1
-1	0.05	0.1	0.2
0	0.05	0.2	0.1
1	0.2	0.05	0.05

a.) Mennyi a kovarianciájuk és a korrelációs együtthatójuk?
b.) Mennyi $\mathbf{E}(Y \mid X = 1)$?

Megoldás: a.)

$\diagdown\ X$ $Y\ \diagdown$	-1	0	1	Y perem
-1	0.05	0.1	0.2	0.35
0	0.05	0.2	0.1	0.35
1	0.2	0.05	0.05	0.3
X perem	0.3	0.35	0.35	1

$\mathbf{E}X = 0.35 - 0.3 = 0.05, \mathbf{E}Y = -0.35 + 0.3 = -0.05$
$\mathbf{E}XY = 0.05 - 0.2 - 0.2 + 0.05 = -0.3$
$\mathrm{cov}(X,Y) = -0.3 + 0.05^2 = -0.2975$
$\mathbf{E}X^2 = 0.65, \mathbf{E}Y^2 = 0.65, \boldsymbol{\sigma}^2 X = \boldsymbol{\sigma}^2 Y = 0.65 - 0.05^2 = 0.6475$
$\mathrm{R}(X,Y) = \frac{-0.2975}{0.6475} = -0.45946$
b.) A feltételes várható értékhez ismernünk kell a feltételes valószínűségeket.
$\mathbf{P}(Y=-1 \mid X=1) = \frac{\mathbf{P}(Y=-1,X=1)}{\mathbf{P}(X=1)} = \frac{0.2}{0.35} = 0.57143$
$\mathbf{P}(Y=0 \mid X=1) = \frac{\mathbf{P}(Y=0,X=1)}{\mathbf{P}(X=1)} = \frac{0.1}{0.35} = 0.28571$
$\mathbf{P}(Y=1 \mid X=1) = \frac{\mathbf{P}(Y=1,X=1)}{\mathbf{P}(X=1)} = \frac{0.05}{0.35} = 0.14286.$
és így a feltételes várható érték

$$\mathbf{E}(Y \mid X=1) = -0.57143 + 0.14286 = -0.42857$$

Látjuk, ez a szám jóval kisebb, mint a feltétel nélküli várható érték. Ez érthető: a kovarianciájuk negatív, ami azt jelenti, hogy X növekedésével általában Y csökkenése jár. Az 1 érték pedig X legnagyobb értéke, így Y kicsi értékei dominálnak.

4. Legyen az X,Y együttes eloszlásfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2-x^2)e^{-y} & \text{, ha } -y \le x \le y, y>0 \\ 0 & \text{, különben} \end{cases}$$

Adjuk meg c értékét és számoljuk ki a perem-sűrűséfüggvényeket! Függetlenek?
Megoldás: $1 = \int_0^\infty \int_{-y}^{y} c(y^2-x^2)e^{-y}dxdy = c\int_0^\infty e^{-y}\left(\int_{-y}^{y}(y^2-x^2)dx\right)dy = c\int_0^\infty e^{-y}\left[y^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-y}^{y}dx =$

$1 = c\int_0^\infty e^{-y}\cdot\frac{4y^3}{3}dy = \frac{4c}{3}\int_0^\infty y^3\cdot e^{-y}dy =$

$= \frac{4c}{3}\left[-6e^{-y} - 6ye^{-y} - 3y^2e^{-y} - y^3e^{-y}\right]_0^\infty = 6\cdot\frac{4c}{3} = 8c \Rightarrow c = \frac{1}{8}.$

Ha $x<0$: $f_X(x) = \int_{-x}^{\infty}\frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dy = \frac{1}{4}e^{x}(1-x)$

Ha $x \ge 0$: $f_X(x) = \int_{x}^{\infty}\frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dy = \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$

Ha $y>0$: $f_Y(y) = \int_{-y}^{y}\frac{1}{8}(y^2-x^2)e^{-y}dx = \frac{1}{6}y^3e^{-y}.$

X és Y nem függetlenek, mert a sűrűségfüggvényre nem teljesül a függetlenségi feltétel. Pl. $f_{X,Y}(0,1) = \frac{1}{8}e^{-1}, f_X(0) = \frac{1}{4}, f_Y(1) = \frac{1}{6}e^{-1}.$

5. Válasszuk az X és Y pontokat egymástól függetlenül a $(-1,1)$-ben egyenletes eloszlás szerint. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet: $x^2 + X\cdot x + Y = 0$. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!
Megoldás: A másodfokú egyenlet diszkrimánsának nemnegatívnek kell lennie:

$$D = X^2 - 4Y \ge 0$$

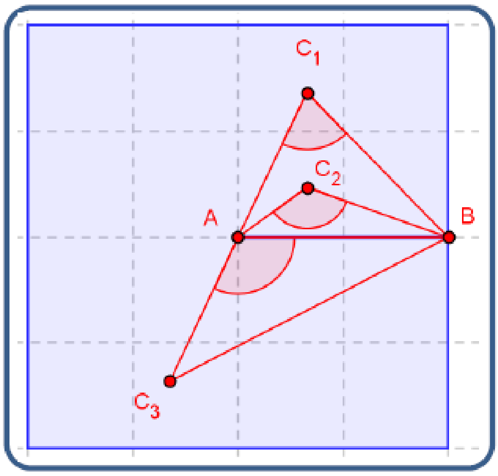
Ez pontosan akkor fog megtörténni, ha az egységnégyzetből származó (X,Y) koordinátájú pont koordinátáira fennáll

$$Y \le \left(\frac{X}{2}\right)^2$$

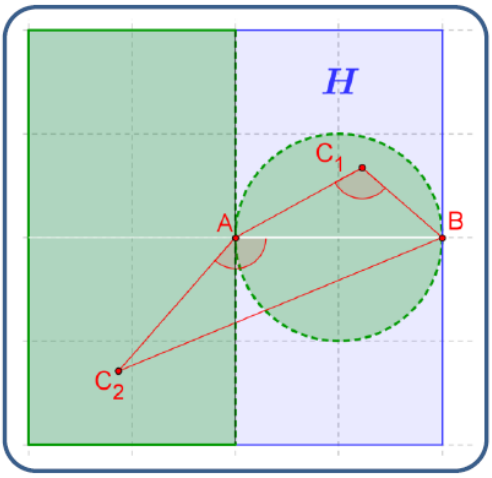
Ennek a valószínűsége pedig geometriai valószínűséggel számolva

$$p = \frac{2 + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{4} dx}{4} = \frac{2 + \frac{1}{6}}{4} = \frac{13}{24} \approx 0.54167$$

6. IMSC Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A, egyik oldalának felezőpontja B. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög hegyesszögű lesz?



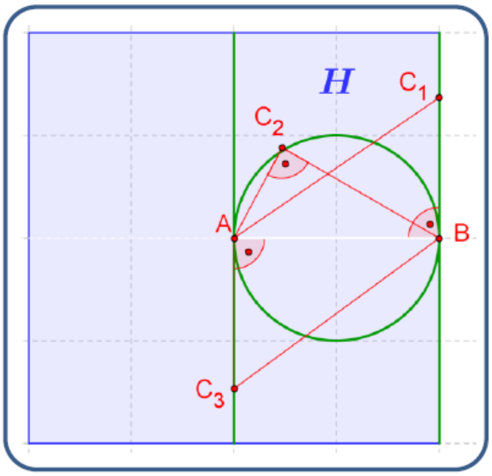
Megoldás: A megoldást geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. A választott mérték a terület. A H eseménytér a 4 egységnyi oldalú négyzet. .
a) Tompaszögű az ABC háromszög, ha valamelyik csúcsánál tompaszöge van.
o Ha az A csúcsnál van a tompaszög, akkor a négyzet bal oldali felén lévő C pontok felelnek meg (kivéve az AB egyenesének pontjait).
o A B csúcsnál legfeljebb derékszög lehet.
o A C csúcsnál akkor lesz tompaszög, ha C az AB szakasz fölé rajzolt Thalész-körön belül van (kivéve az AB szakasz pontjait).
Legyen a T esemény az, hogy az ABC háromszög tompaszögű lesz.



A T akkor következik be, ha a kiválasztott C pont a zöld tartományba esi ennek területe:

$$2 \cdot 4 + \pi$$

Így a keresett valószínűség: $p_t = \mathbf{P}(\text{tompaszügű háromszög}) = \frac{8+\pi}{16} = 0.69635$
b.) Legyen a D esemény az, hogy az ABC háromszög derékszögű lesz. Derékszögű lesz az ABC háromszög, ha C az alábbi ábrán látható zöld színű görbék valamely pontja. Mivel e vonalak területe 0, ezért , így a keresett valószínűség is $p_d = 0$.



c.) A hegyesszögű háromszög keletkezésének valószínűségét a komplemens elvből számolhatjuk:
$p_h = 1 - p_t - p_d = 1 - \frac{8+\pi}{16} - 0 = 0.30365$

B. csoport

1. Két telefon van az irodában, éppen mindkettőn beszélnek. Bálint átlagosan 6 percig szokott beszélni, Dénes 4 percig. Legyen X és Y az a valószínűségi változó, amely azt mondja meg, hogy mostantól hány perc múlva fejezi be Bálint, illetve Dénes a beszélgetést. Mennyi a valószínűsége, hogy Dénes előbb fejezi be a beszélgetést, mint Bálint? (A beszélgetés ideje exponenciális eloszlású).

Megoldás: Az X és Y független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, így együttes sűrűségfüggvényük:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{24}e^{-\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}y}, x,y > 0$$

A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(Y < X) = \iint\limits_{y<x} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty\int_y^\infty \frac{1}{24}e^{-\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}y}dxdy =$$

$$\frac{1}{24}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}y}\int_y^\infty e^{-\frac{1}{6}x}dxdy = \frac{1}{24}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}y}\left[-6e^{-\frac{1}{6}x}\right]_y^\infty dx =$$

$$\frac{1}{24}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}y}\cdot 6\cdot e^{-\frac{1}{6}y}dy = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-\frac{5}{12}y}dy = \frac{1}{4}\cdot\frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

2. A menzán kétféle menüből, az A és B jelűből lehet választani. Ma olyan az ebéd, hogy a tapasztalatok szerint a diákoknak kb. a 25 százaléka választja az A menüt. Ebből már csak 20 adag van, a B-ből még 40. Még 50 ember van hátra.
a.) Mennyi a pontos valószínűsége, hogy mindenki kaphat olyat, amilyet szeretne? (Csak a képletet írja fel).
b.) Normális eloszlással közelítve, milyen eredményt kapunk?

Megoldás: a.) Mindenki azt kap, amit szeretne, ha az A menüt választók száma legalább 10 de legfeljebb 20. A hátralévő 50 ember egymástól függetlenül 25 százalék valószínűséggel választ A menüt, így az A menüt választók száma a 50-ből binomiális eloszlású.

$$\mathbf{P}(10 \leq \text{az A menüt választók száma} \leq 20) = \sum_{k=10}^{20}\binom{50}{k}\cdot 0.25^k\cdot 0.75^{50-k} \approx 0.83005$$

b.) Ha X jelöli az A menüt választók számát, akkor $\mathbf{E}X = 12,5, \sigma X = \sqrt{9.375} = 3.0619.$ A Moivre-Laplace tétel szerint X standardizáltja jól közelíti a standard normális eloszlást:

$$\frac{X-12.5}{3.0619} \approx N(0,1)$$

Így

$$\mathbf{P}(10 \leq X \leq 20) = \mathbf{P}\left(\frac{10-12.5}{3.0619} \leq \frac{X-12.5}{3.0619} \leq \frac{20-12.5}{3.0619}\right) = \mathbf{P}\left(-0.81649 \leq \frac{X-12.5}{3.0619} \leq 2.4495\right) \approx$$

$$\approx \Phi(2.4495) + \Phi(0.81649) - 1 \approx 0.9927 + 0.7939 - 1 = 0.7866$$

3. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlása a következő:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0,1	0,05	0,2
0	0,05	0,2	0,1
1	0,15	0,1	0,05

a.) Mennyi a kovarianciájuk és a korrelációs együtthatójuk?
b.) Mennyi $\mathbf{E}(Y \mid X = -1)$?

Megoldás: a.)

$Y \backslash X$	-1	0	1	Y perem
-1	0,1	0,05	0,2	0.35
0	0,05	0,2	0,1	0.35
1	0,15	0,1	0,05	0.3
X perem	0.3	0.35	0.35	1

$\mathbf{E}X = 0.35 - 0.3 = 0.05, \mathbf{E}Y = -0.35 + 0.3 = -0.05$
$\mathbf{E}XY = 0.1 - 0.2 - 0.15 + 0.05 = -0.2$
$\operatorname{cov}(X, Y) = -0.2 + 0.05^2 = -0.1975$
$\mathbf{E}X^2 = 0.65, \mathbf{E}Y^2 = 0.65, \sigma^2 X = \sigma^2 Y = 0.65 - 0.05^2 = 0.6475$
$\mathrm{R}(X, Y) = \frac{-0.1975}{0.6475} = -0.30502$
b.) A feltételes várható értékhez ismernünk kell a feltételes valószínűségeket.
$\mathbf{P}(Y = -1 \mid X = -1) = \frac{\mathbf{P}(Y=-1, X=-1)}{\mathbf{P}(X=-1)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$
$\mathbf{P}(Y = 0 \mid X = -1) = \frac{\mathbf{P}(Y=0, X=-1)}{\mathbf{P}(X=-1)} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$
$\mathbf{P}(Y = 1 \mid X = -1) = \frac{\mathbf{P}(Y=1, X=-1)}{\mathbf{P}(X=-1)} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2}.$
és így a feltételes várható érték

$$\mathbf{E}(Y \mid X = -1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \approx 0.16667$$

4. Legyen az X, Y együttes eloszlásfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-2y} & \text{, ha } -y \le x \le y, y > 0 \\ 0 & \text{, különben} \end{cases}$$

Adjuk meg c értékét és számoljuk ki a peremsűrűséfüggvényeket! Függetlenek?
Megoldás: $1 = \int_0^\infty \int_{-y}^{y} c(y^2 - x^2)e^{-2y}dxdy = c\int_0^\infty e^{-2y}\left(\int_{-y}^{y}(y^2 - x^2)dx\right)dy = c\int_0^\infty e^{-2y}\left[y^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-y}^{y}dx =$
$1 = c\int_0^\infty e^{-2y} \cdot \frac{4y^3}{3}dy = \frac{4c}{3}\int_0^\infty y^3 \cdot e^{-2y}dy : \frac{3}{8}\int y^3 \cdot e^{-2y}dy :$
$= \frac{4c}{3}\left[-\frac{3}{8}e^{-2y} - \frac{3}{4}ye^{-2y} - \frac{3}{4}y^2e^{-2y} - \frac{1}{2}y^3e^{-2y}\right]_0^\infty = \frac{3}{8} \cdot \frac{4c}{3} = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2.$
Ha $x < 0$: $f_X(x) = \int_{-x}^{\infty} 2(y^2 - x^2)e^{-2y}dy = e^{2x}(\frac{1}{2} - x)$
Ha $x \ge 0$: $f_X(x) = \int_{x}^{\infty} 2(y^2 - x^2)e^{-2y}dy = e^{-2x}(x + \frac{1}{2})$
Ha $y > 0$: $f_Y(y) = \int_{-y}^{y} 2(y^2 - x^2)e^{-2y}dx = \frac{8}{3}y^3e^{-2y}$
X és Y nem függetlenek, mert a sűrűségfüggvényre nem teljesül a függetlenségi feltétel. Pl.
$f_{X,Y}(0,1) = 2e^{-2}, f_X(0) = \frac{1}{2}, f_Y(1) = \frac{8}{3}e^{-2}.$

5. Válasszuk az X és Y pontokat egymástól függetlenül a $(-1,1)$-ben egyenletes eloszlás szerint. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet: $f(x) = x^2 + X \cdot x - 2Y = 0$. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!

Megoldás: A másodfokú egyenlet diszkrimánsának nemnegatívnek kell lennie:

$$D = X^2 + 8Y \ge 0$$

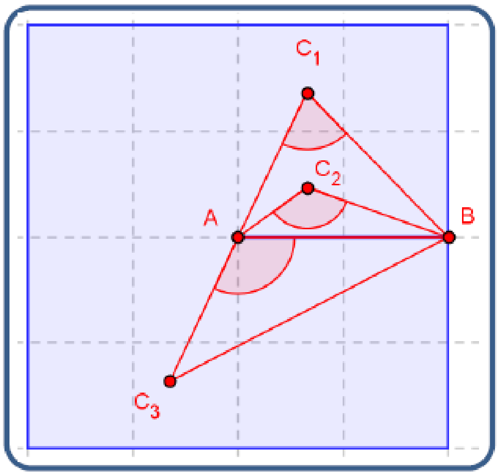
Ez pontosan akkor fog megtörténni, ha az egységnégyzetből származó (X, Y) koordinátájú pont koordinátáira fennáll

$$Y \ge -\frac{X^2}{8}$$

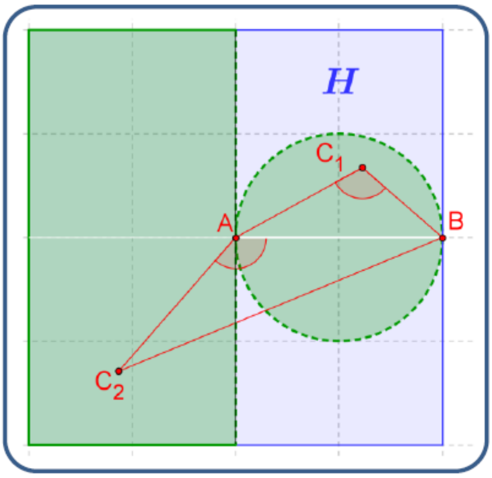
Ennek a valószínűsége pedig geometriai valószínűséggel számolva:

$$p = 1 - \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \left(-\frac{x^2}{8} + 1 \right) dx = \frac{25}{48} \approx 0.52083$$

6. IMSC Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A, egyik oldalának felezőpontja B. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög tompaszögű lesz?



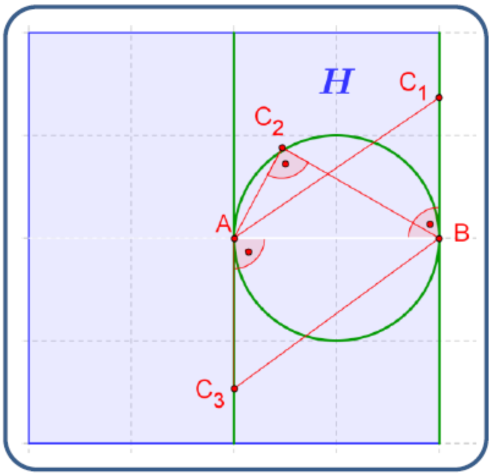
Megoldás: A megoldást geometriai valószínűségi mezőben adjuk meg. A választott mérték a terület. A H eseménytér a 4 egységnyi oldalú négyzet. .
a) Tompaszögű az ABC háromszög, ha valamelyik csúcsánál tompaszöge van.
  o Ha az A csúcsnál van a tompaszög, akkor a négyzet bal oldali felén lévő C pontok felelnek meg (kivéve az AB egyenesének pontjait).
  o A B csúcsnál legfeljebb derékszög lehet.
  o A C csúcsnál akkor lesz tompaszög, ha C az AB szakasz fölé rajzolt Thalész-körön belül van (kivéve az AB szakasz pontjait).
Legyen a T esemény az, hogy az ABC háromszög tompaszögű lesz.



A T akkor következik be, ha a kiválasztott C pont a zöld tartományba esi ennek területe:

$$2 \cdot 4 + \pi$$

Így a keresett valószínűség: $p_t = \mathbf{P}\left(\text{tompaszügű háromszög}\right) = \frac{8+\pi}{16} = 0.69635$
b.) Legyen a D esemény az, hogy az ABC háromszög derékszögű lesz. Derékszögű lesz az ABC háromszög, ha C az alábbi ábrán látható zöld színű görbék valamely pontja. Mivel e vonalak területe 0, ezért , így a keresett valószínűség is $p_d = 0$.



c.) A hegyesszögű háromszög keletkezésének valószínűségét a komplemens elvből számolhatjuk:
$p_h = 1 - p_t - p_d = 1 - \frac{8+\pi}{16} - 0 = 0.30365$