PZH1 megoldások

2016. november 2.

1. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a jármű-vek 50%-a személyautó, 35%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15%-ánál, a teherautók 20%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel. Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a műszaki állapota kifogásolható;

b) ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor az teherautó?

Megoldás: a.) Vezessük be a következő eseményeket! Az adott jármű:

$S = \{$személyautó$\}$; $T = \{$teherautó$\}$; $E = \{$egyéb jármű$\}$; $A = \{$hibás jármű$\}$.

S, T, E teljes eseményrendszert alkot,

$\mathbf{P}(S) = 0,5, \mathbf{P}(T) = 0,35, \mathbf{P}(E) = 0,15, \mathbf{P}(A \mid S) = 0,15; \mathbf{P}(A \mid T) = 0,2; \mathbf{P}(A \mid E) = 0,35$

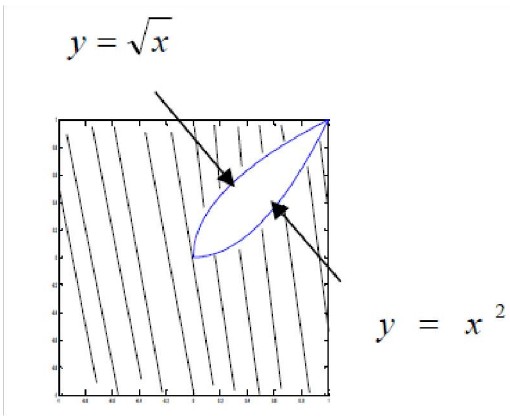
A teljes valószínűség tételéből:

$\mathbf{P}(A) = 0,15 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,15 = 0,1975$

b.) A Bayes tételből: $\mathbf{P}(T \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid T) \cdot \mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,35}{0,1975} = 0,35443$

2. Választunk két számot egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[-1,1]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik szám kisebb, mint a másik négyzete?

Megoldás: $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$. $t_\Omega = 4, x < y^2$ vagy $y < x^2$. Ha valamelyik koordináta negatív, akkor valamelyik egyenlőtlenség teljesül. Ha mindkét koordináta nemnegatív, akkor négyzetgyököt vonhatunk az első egyenlőtlenségekből, azaz $\sqrt{x} < y$ vagy $y < x^2$. A kedvező pontok halmaza:



$$t_{jó} = 3 + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1 - \sqrt{x})dx = 3 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x + \frac{\sqrt{x^3}}{1.5}\right]_0^1 = \frac{11}{3}$$

A keresett valószínűség:

$$p = \frac{t_{jó}}{t_\Omega} = \frac{11}{12}$$

3. Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legfeljebb három akadályt ver le?

Megoldás: A levert akadályok X száma Poisson eloszlású,

$\mathbf{P}(X = 0) = 0.05 = e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda = \ln\frac{1}{0.05} = 2.9957.$

$\mathbf{P}(X \leq 3) = 0.05 \cdot \sum_{i=0}^{3} \frac{\left(\ln\frac{1}{0.05}\right)^i}{i!} = 0.64819.$

4. A 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul?
Megoldás: Összes eset: $\binom{32}{7}$. Kedvező eset $\mathbf{k}$: $A_i = \{$az i-edik szín *nem* fordul elő a kivett lapok között$\}$.
$\mathbf{k}(A_i) = \binom{24}{7}, \mathbf{k}(A_iA_j) = \binom{16}{7}, \mathbf{k}(A_iA_jA_k) = \binom{8}{7}, \mathbf{k}(A_iA_jA_kA_l) = 0$
A Poincare formulából:

$$\mathbf{k}(\bar{A}_i\bar{A}_j\bar{A}_k\bar{A}_l) = \binom{32}{7} - \mathbf{k}(A_i + A_j + A_k + A_l) =$$
$$= \binom{32}{7} - 4 \cdot \binom{24}{7} + 6 \cdot \binom{16}{7} - 4 \cdot \binom{8}{7} = 2050048$$

A keresett valószínűség tehát: $\frac{2050048}{\binom{32}{7}} = \frac{4928}{8091} = 0,60907$

5. Egy automata cukorkát csomagol. (A zacskókban lévő cukorka tömege normális eloszlásúnak tekinthető.)
a.) Milyen mennyiségű adagra állítsák be az automatát, ha az 500 grammosnak címkézett zacskóknak legfeljebb 3%-ába kerülhet 490 grammnál kevesebb cukorka, és az adagok szórása $\sigma = 10$ gramm?
b.) Mennyi lehet a σ szórás, ha azt akarjuk, hogy az automatát 500 grammra állítva, az 500 grammosnak címkézett zacskóknak legfeljebb 3%-ába kerüljön 490 grammnál kevesebb cukorka?
Megoldás: a.) Jelölje a zacskó súlyát X. Tudjuk, hogy $X \in N(m,\sigma)$. Mennyi legyen m, hogy

$$\mathbf{P}(X < 490) = 0,03$$

Legyen

$$\mathbf{P}(X < 490) = \Phi\left(\frac{490 - m}{10}\right) = 0,03 \Rightarrow \Phi\left(\frac{m - 490}{10}\right) = 0,97 \Rightarrow \frac{m - 490}{10} = 1,89$$

$$m = 18,9 + 490 = 508,9$$

b.)

$$\mathbf{P}(X < 490) = \Phi\left(\frac{490 - 500}{\sigma}\right) = 0,03 \Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0,97 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} = 1,89$$

$$\sigma = \frac{10}{1.89} = 5,291$$

6$^{)IMSC}$ 10-szer elgurítunk egy szabályos kockát. Legyen X az a szám, ahányféle számot gurítunk. Adja meg X eloszlását. Hányféle számot gurítunk a legnagyobb eséllyel?
Megoldás: $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}, \mathbf{P}(X = 1) = \frac{6}{6^{10}}, \mathbf{P}(X = 2) = \frac{\binom{6}{2}\cdot(2^{10}-2)}{6^{10}}, \ldots$
Összes eset: $n = 6^{10} = 60466176$
Kedvező esetek: $k_1 = 6, k_2 = \binom{6}{2} \cdot (2^{10} - 2) = 15330$
$k_3 = \binom{6}{3} \cdot (3^{10} - 3 \cdot 2^{10} + 3) = 1119600, k_4 = \binom{6}{4} \cdot (4^{10} - 4 \cdot 3^{10} + 6 \cdot 2^{10} - 4) = 12277800$
$k_5 = 6 \cdot (5^{10} - 5 \cdot 4^{10} + 10 \cdot 3^{10} - 10 \cdot 2^{10} + 5) = 30618000,$
$k_6 = 6^{10} - 6 \cdot 5^{10} + 15 \cdot 4^{10} - 20 \cdot 3^{10} + 15 \cdot 2^{10} - 6 = 16435440$
$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 6 + 15330 + 1119600 +$
$+12277800 + 30618000 + 16435440 = 60466176 = n$
Legnagyobb eséllyel 5 féle számot fogunk gurítani.