1. Legyenek $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = p$. Tegyük fel, hogy A,Bés C teljesen függetlenek. Határozza meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az A,Bés C közül csak az egyik fog bekövetkezni!

Megoldás: $\mathbf{P}(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B})\mathbf{P}(\bar{C})+\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{C})+\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\bar{B})\mathbf{P}(C) = 3p(1-p)^2$.

2. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel, míg 10 alkalommal fej nem lesz az eredmény. Legyen X az eddig dobott írások száma. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását.

Megoldás: $R_X = \{0,1,2,\dots\}$
$\mathbf{P}(X=i) = \binom{i+9}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i+10}$
$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\binom{i+9}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i+10} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+9)!}{9!\cdot(i-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i+10} = 10$
X felírható $X = Y_1+Y_2+\cdots+Y_{10}-10$ alakban, ahol $Y_i \in G(\frac{1}{2})$ teljesen függetlenek. Így
$\mathbf{E}X = 10\cdot\mathbf{E}Y_1 - 10 = 10.$
$\sigma^2X = 10\cdot\sigma^2Y_1 = 10\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 20 \Rightarrow \sigma X = \sqrt{20} \approx 4.4721.$

3. Feldobunk egy szabályos kockát, majd a dobott értéknek megfelelő számú lapot visszatevés nélkül kihúzunk a 32 lapos magyar kártyacsomagból. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz ász?

Megoldás: A_i : i-t dobunk a kockával, B : van ász a kihúzott kártyalapok között.
$\mathbf{P}(B \mid A_i) = 1-\frac{\binom{28}{i}}{\binom{32}{i}}$. A teljes valószínűség tételéből:
$$\mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{6}\left(1-\frac{\binom{28}{i}}{\binom{32}{i}}\right)\right] \approx 0{,}274.$$

4. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes eloszlású?

Megoldás: Ha $X \in N(0,1)$, akkor $\mathbf{P}(X>\frac{1}{2}) = 1-\Phi(\frac{1}{2}) \approx 0{,}309.$
Ha $X \in U(a,b)$, akkor $\mathbf{E}X = \frac{a+b}{2} = 0, \sigma X = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = 1$, azaz
$b = -a = \sqrt{3}$.
Ekkor $\mathbf{P}(X>\frac{1}{2}) = 1-\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}356.$ Tehát az egyenletes eloszlás esetén kapunk nagyobb valószínűséget.

5. Legyen X egy 3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Adja meg az $\mathbf{E}(2+X)^2$ és a $\sigma^2(5-2X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.

Megoldás: $\mathbf{E}X = \frac{1}{3}, \sigma^2X = \frac{1}{9}, \mathbf{E}X^2 = \sigma^2X+(\mathbf{E}X)^2 = \frac{2}{9}.$
$\mathbf{E}(2+X)^2 = 4+4\mathbf{E}X+\mathbf{E}X^2 = 4+\frac{4}{3}+\frac{2}{9} = \frac{50}{9}, \sigma^2(5-2X) = \sigma^2(2X) = 4\sigma^2(X) = \frac{4}{9}.$

6. IMSC n szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott számok összege osztható 6-tal?

Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítunk. Állítás n dobás során az összes lehetőség 1/6-ánál lesz az összeg 6-tal osztható. $n=1$ és $n=2$ esetben egyszerűen belátható ez. Tegyük fel, hogy ez igaz valamely $n \geq 2$ kockadobásnál is. Vegyünk most egy tetszőleges olyan n hosszúságú sorozatot, amelynél a dobásösszeg 6-tal való osztás után i maradékot ad. ($i \in \{0,1,2,3,4,5\}$) Ha ehhez hozzáragasztjuk az $n+1$-dik dobást, akkor a 6 lehetséges dobásérték közül 5 esetben a hosszabb sorozat nem osztható 6-tal, míg az egyik folytatás esetén éppen osztható lesz 6-tal az $n+1$ hosszú összeg. Vagyis az $n+1$ hosszúságú sorozatoknál is a hattal osztható, 6-tal nem osztható sorozatok aránya 1:5 lesz. Így a keresett valószínűség 1/6 lesz.