Mérnökinformatikus BSc
Valószínűségszámítás PPZH1
2016. december 14.

1. Egy csavargyárban az egyik gép meghibásodása miatt az elkészült csavarok 15%-a selejt. Visszatevéssel 4 elemű mintát veszünk. Jelölje az X valószínűségi változó a hibátlan csavarok számát a mintában.
a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában lesz selejtes csavar?
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában legalább kettő csavar selejtes lesz?
c) Legalább hány elemű mintát kell vennünk ahhoz, hogy 80%-nál nagyobb valószínűséggel legyen benne selejtes csavar?
Megoldás: $X \in B(4, 0.85)$
a.) $\mathbf{P}(X \neq 4) = 1 - (0.85)^4 = 0.47799$
b.) $\mathbf{P}(X \leq 2) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) =$
$= 0.15^4 + 4 \cdot 0.15^3 \cdot 0.85 + 6 \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^2 = 0.10952$
c.) $\mathbf{P}(X \neq 4) = 1 - (0.85)^n > 0.8 \Rightarrow 0.2 > (0.85)^n \Rightarrow n > \frac{\ln 0.2}{\ln 0.85} = 9.9031 \Rightarrow$
Legalább 10 elemű minta kell.

2. Péter és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és *fél nyolc* között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Érkezésük független és egyenletes a 7-7.30 időintervallumban. Judit 5 percet hajlandó várni Péterre, míg Péter 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk?
Megoldás: Jelölje X a Judit, Y a Péter érkezési idejét. Az (X, Y) pont az egységnégyzet egy pontja. A Találkozás feltételei:

$$X \leq Y \leq X + \frac{1}{6} \text{ vagy } Y \leq X \leq Y + \frac{1}{3}$$

Ezek a feltételek egy sávot képeznek az egységnégyzet átlója körül, aminek területe adja meg a keresett valószínűséget:

$$1 - \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}}{2} - \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{31}{72} = 0.43056$$

3. A felnőtt korú munkaképes lakosság 20%-a beszél legalább egy idegen nyelvet és 80%-a nem beszél idegen nyelven. A nyelvet beszélők 0.025, a nyelvet nem beszélők 0.10 valószínűséggel munkanélküliek egy adott időpillanatban.
a) Kiválasztva egy embert, mennyi az esélye hogy munkanélküli az adott időpillanatban?
b) Ha a kiválasztott ember nem munkanélküli az adott időpillanatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem beszél idegen nyelvet?
Megoldás: B_1 : a kiválasztott ember beszél idegen nyelvet, B_2 : a kiválasztott ember nem beszél idegen nyelvet, A : a kiválasztott ember munkanélküli az adott időpillanatban.

$$\mathbf{P}(A \mid B_1) = 0.025, \mathbf{P}(A \mid B_2) = 0.1, \mathbf{P}(B_1) = 0.2, \mathbf{P}(B_2) = 0.8$$

a.) $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B_1)\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(A \mid B_2)\mathbf{P}(B_2) = 0.025 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.085$

b.) $\mathbf{P}(B_2 \mid \bar{A}) = \dfrac{\mathbf{P}(\bar{A} \mid B_2)\mathbf{P}(B_2)}{\mathbf{P}(\bar{A})} = \dfrac{(1 - 0.1) \cdot 0.8}{1 - 0.085} = 0.78689$

4. Legyen X normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 0.7. Mennyi X szórása, ha X értéke kisebb 1-nél 0.85 valószínűséggel?

Megoldás:
$X \in N(0.7, \sigma)$. $\mathbf{P}(X < 1) = 0.85. \Phi(\frac{1-0.7}{\sigma}) = 0.85$, $\frac{1-0.7}{\sigma} = 1.04 \Rightarrow \sigma = 0.288$

5. Egy adott típusú radioaktív atom élettartama években mérve exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az
atom 32 év leforgása alatt 0.5 valószínűséggel bomlik el.
a) Mennyi az esélye, hogy az atom 24 év alatt se bomlik el?
b) Mennyi időn belül bomlik el az atom 0.95 valószínűséggel?
Megoldás: X jelölje az atom élettartamát.

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\mathbf{P}(X < 32) = F(32) = 1 - e^{-32\lambda} = 0.5 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{32} = 0.021667 \approx 0.022$
a) $\mathbf{P}(x \geq 24) = 1 - F_X(24) = e^{-0.022 \cdot 24} = 0.58978$
b) $x = ?$ $\mathbf{P}(X < x) = 0.95$, $F_X(x) = 1 - e^{-0.022 \cdot x} = 0.95$, $x = \frac{\ln 0.05}{-0.022} = 136.17$

6^{IMSC}. Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül $1-p$ valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy hárommotoros?
Megoldás: Hárommotoros gép esetében a biztonságos repülés valószínűsége:

$$p^3 + 3 \cdot (1-p) \cdot p^2$$

Az ötmotoros gép esetében ez:

$$p^5 + 5 \cdot (1-p) \cdot p^4 + 10 \cdot (1-p)^2 \cdot p^3$$

$$p^5 + 5 \cdot (1-p) \cdot p^4 + 10 \cdot (1-p)^2 \cdot p^3 > p^3 + 3 \cdot (1-p) \cdot p^2$$

$$p^3 + 5 \cdot (1-p) \cdot p^2 + 10 \cdot (1-p)^2 \cdot p + 2 \cdot p - 3 > 0$$

$p^3 + 5 \cdot (1-p) \cdot p^2 + 10 \cdot (1-p)^2 \cdot p + 2 \cdot p - 3 = 12p - 15p^2 + 6p^3 - 3 \Rightarrow$
$12p - 15p^2 + 6p^3 - 3 > 0 \Rightarrow 0 < 2p^3 - 5p^2 + 4p - 1 = 2p^3 - 2p^2 - 3p^2 + 3p + p - 1 =$
$(p-1)[2p^2 - 3p + 1] = (p-1)^2(2p-1) > 0$
Mivel $(p-1)^2$ a $p < 1$ esetben teljesül, $p > \frac{1}{2}$ kell.
Tehát a $12p - 15p^2 + 6p^3 - 3 > 0$ reláció a $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ esetben teljesül, azaz ekkor biztonságosabb az ötmotoros gép a hárommmotorosnál.