Valószínűsegszámítás jegyzet

Buzga Viktor

March 21, 2011

Contents

Chapter 1

Bevezető

A jegyzet a 2010. évi őszi félévben, Pintér Márta által tartott Valószínűségszámítás kurzus (VISZA208) előadásai alapján készült. Az órákon elhangzottak alapján íródott, azonban nem helyettesíti az órák látogatását, csupán kiegészítést nyújt azokhoz. A jegyzet hibákat tartalmazhat, ezért kérem használóit, hogy amennyiben hibákat fedeznek fel olvasása közben, értesítsenek a vik.barca@gmail.com e-mail címen, hogy azok javításra kerülhessenek. A jegyzetet olyan diákok számára ajánlom, akik az órák látogatása mellett szeretnének pontos képet kapni az ott elhangzottakról.

Part I

Valószínűségszámítás

Chapter 2

Valószínűségi alapfogalmak

Véletlen kísérletnek nevezzük azokat a a jelenségeket, amiknek kimeneteit az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg. Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi eseményeknek* nevezzük. ω-val jelöljük őket, és mindig pontosan egy következik be közülük. Az elemi események összességét *eseménytérnek* nevezzük és Ω-val jelöljük. *Eseményeknek* hívjuk az eseménytér részhalmazait. Egy A esemény bekövetkezik, ha olyan elemi esemény realizálódik, ami eleme az A eseménynek. *Lehetetlen eseménynek* nevezzük az olyan eseményt, ami soha nem következik be.(Az ötöslottó megnyerése nem lehetetlen esemény, csupán nagyon kis valószínűséggel bekövetkező, viszont az, hogy egyszerre 1 kockával 3-at és párosat dobjunk az lehetetlen.) *Biztos esemény* ezzel ellentétben, amely az összes elemi eseményt tartalmazza, így minden alkalommal bekövetkezik.(Például az, hogy 0-nál nagyobbat dobunk egy szabályos kockával)

Az eseményeket felfoghatjuk halmazoknak, és érvényesek rájuk a halmazműveletek is.

- Két esemény összegén az $A \bigcup B$ halmazt értjük, vagyis akkor következik be, ha legalább az egyik végbemegy.
- Két esemény szorzatán az $A \bigcap B$ halmazt értjük, ez tehát akkor következik be, ha mindkettő végbemegy.
- A esemény ellentett eseményén $(\overline{A})$, vagy komplementerén az $\Omega \backslash A$ halmazt értjük, ami tehát akkor következik be, ha A nem.
- $A \subseteq B$, kiolvasva A maga után vonja a B eseményt. Ha A bekövetkezik, akkor B is.

A megfigyelhető események halmaza az a halmaz, melyről el tudjuk dönteni, hogy egy végbement elemi esemény benne van-e vagy nem. A teljes eseménytér megfigyelhető, jelben $\Omega \in \mathcal{F}$. Ha $A \in \mathcal{F}$ akkor $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Ha véges sok esemény megfigyelhető, akkor az összegük is megfigyelhető. Ezen axiómák segítségével belátható, hogy a lehetetlen esemény is megfigyelhető, továbbá, ha véges sok esemény megfigyelhető, akkor azok szorzata is. Két eseményt *kizáró eseménynek* nevezünk, ha $AB = \emptyset$. $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszert alkotnak, ha páronként kizáróak és összegük kiadja a teljes esményteret.

Chapter 3

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

Definíció I.1 *Valószínűség:* Halmazfüggvény, mely a megfigyelhető események halmazáról képez a [0,1] intervallumra. Minden $\mathcal{F}$-beli eseményre értelmezve van.
Tulajdonságai: (Kolmogorov féle axiómarendszer:)

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ (vagy megszámlálhatóan sok megfigyelhető esemény) páronként kizáró események, vagyis $A_i A_j = \emptyset \quad \forall$ i,j-re, ekkor $P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$

Egy kísérletsorozat alkalmával n-szer megismétlünk egy kísérletet azonos körülmények között. A korábbi eredmények nem befolyásolják a következő kimenetelét. Az esemény gyakoriságán azt a k_A számot értjük, amely az A esemény bekövetkezéseinek számával egyenlő. Relatív gyakoriság értéke ennek a számnak a kísérletek számára vonatkoztatott hányadosa, jelben $r_n(A) = \frac{k_A}{n}$. A gyakoriság értéke 0 és n közti szám, így a relatív gyakoriság a [0,1] intervallumban van, és $r_n(\Omega) = 1$, hiszen a teljes eseményrendszer eseményei közül mindig legalább az egyik realizálódik. $(n \to \infty)$ esetén a relatív gyakoriság a valószínűséghez tart.
A valószínűség tujaldonságai:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, mert A és $\overline{A}$ kizáró események és $1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
2. $P(\emptyset) = 0$, mert $\emptyset = \overline{\Omega}$ és $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
3. Ha $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ teljes eseményrendszert alkotnak(páronként kizáróak és összegük kiadja a teljes eseményteret), akkor $\sum P(A_i) = 1$, mert
$$\sum P(A_i) = P\left(\sum A_i\right) = P(\Omega) = 1$$

4. $A \subseteq B$ esetén $P(A) \leq P(B)$, mert $B = AB + \overline{A}B$ így $P(B) = P(\underbrace{AB}_{A}) + \underbrace{P(\overline{A}B)}_{\geq 0}$, amiből $P(B) \geq P(A)$.

5. $P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$, mert $B = AB + \overline{A}B$, $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, ahol $P(\overline{A}B) = P(B \setminus A)$

Ha A és B nem kizáró események, akkor a két esemény uniójának a valószín H uségét a logikai szita módszerével számíthatjuk ki. Ennek értelmében:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Három esemény esetén pedig:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Definíció I.2 Poincare-formula: $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ esetén legyen

$$S_1^n = \sum_{i=1} P(A_i) \quad S_2^n = \sum_{1<i<j<n} P(A_iA_j) \quad S_n^n = P(A_1A_2 \ldots A_n)$$

Ekkor azt mondhatjuk, hogy

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} S_l^n$$

A tétel bizonyítása teljes indukcióval történik.

Tétel I.1 Boole-tétel Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nem páronként kizáró események, akkor

$$a, P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$b, P\left(\prod A_i\right) \geq 1 - \sum P(\overline{A}_i)$$

Bizonyítás:
a, n = 2-re a logikai szita segítségével könnyű belátni. Majd teljes indukció segítségével visszavezethető n = 2 esetére.
b, A de-Morgan formulák segítsgvel az állítás egyszerüen belátható.

Folytonossági tulajdonság:

1. Növekvő halmazok tétele:

$$\text{Ha } A_1 \leq A_2 \leq A_3 \ldots \leq A_n \leq \ldots \quad \text{és} \quad A = \sum A_i, \text{ akkor}$$

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

2. Csökkenő halmazok tétele:

$$\text{Ha } A_1 \geq A_2 \geq A_3 \ldots \geq A_n \geq \ldots \quad \text{és} \quad A = \prod A_i, \text{ akkor}$$

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Ezen tulajdonságokkal rendelkezik, az úgynevezett Kolmogorov féle valószínűségi mező, melyet az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ értékekkel jellemzünk.

Chapter 4

Klasszikus valószínűségi mező

4.1 Klasszikus valószínűségi mező

Egy kísérlet, mely véges sok kimenetellel rendelkezik $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n\}$ esetén klasszikus valószínűségi mezőben $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \cdots = P(\omega_n) = p$

$$1 = P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = nP \quad \text{amiből } P = \frac{1}{n}$$

Ha az A esemény k darab elemi eseményt tartalmaz, akkor az A esemény valószínűsége

$$\frac{k}{n} = k\frac{1}{n} = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = P(A)$$

ami a kedvező esetek és az összes esetek hányadosával egyenlő. Tehát klasszikus valószínűségi mezőben

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes esetek}}$$

4.2 Geometriai valószínűségi mező

Geometriai valószínűségi mező esetében a kísérlet eseménytere egy geometriai alakzat területe, maga a kísérlet pedig az alakzat egy pontjának kiválasztása. Az alakzat mérhető területeit nevezzük eseményeknek, és egy esemény bekövetkezik, ha olyan pont kerül kiválasztásra, ami benne van az esemény által lefedett területben. Jelöljük $\mu(A)$-vel egy A esemény által lefedett terület nagyságát. Ekkor az A esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Chapter 5

Feltételes valószínűség

Legyen A és B két tetszőleges esemény ($P(B) > 0$). n-szeres kísérletsorozat esetén vegyük csak azokat az eseteket, amiknél B bekövetkezett, és ezek között nézzük A előfordulásait. Ezt nevezzük az A esemény B-re vonatkoztatott relatív gyakoriságának és $\frac{k_{AB}}{k_B} = r_n(A|B)$-vel jelöljük, ahol k-k a megfelelő események gyakoriságait jelölik.

$$r_n(A|B) = \frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}/n}{k_B/n} = \frac{r_n(AB)}{r_n(B)} \longrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (n \to \infty)$$

innen ered a következö definíció.

Definíció I.3 Az A esemény B-re vonatkoztatott feltételes valószínűsége: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Tétel I.2

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(B|B) = 1$, $P(\emptyset|B) = 0$
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}, A_iA_j = 0 \quad \forall i, j$-re, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}(A_i)|B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$$

Bizonyítás:

1. $A \cdot B \subseteq B \Rightarrow P(AB) \leq P(B) \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} \leq 1$
   $P(AB) \geq 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) \geq 0$
2. $B \cdot B = B \Rightarrow P(B \cdot B) = P(B) \Rightarrow \frac{P(B \cdot B)}{P(B)} = 1$, $\emptyset \cdot B = \emptyset$
   $\Rightarrow P(\emptyset \cdot B) = 0 \Rightarrow P(\emptyset|B) = 0$

3. A_i-k kizáróak $\Rightarrow A_iB$-k is kizáróak, így

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_iB\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB)$$

Ezt leosztva $P(B)$-vel beláttuk az állítást.

A definícióból következik az úgynevezett *szorzási szabály* :
$P(AB) = P(A|B)P(B)$, ami általánosan is igaz:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

Bizonyítása a két változóra vett szorzás szabály alkalmazásával egyszerű.

Tétel I.3 *Teljes valószínűség tétele*
$A_1, A_2, \dots A_n$ megszámlálhatóan sok esemény teljes eseményrendszert alkot és $P(A_i) > 0 \quad \forall i$-re. Tetszőleges B esemény valószínűsége:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

Tétel I.4 *Bayes tétele*
$A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ megszámlálhatóan sok esemény teljes eseményrendszert alkot és $P(A_i) > 0 \quad \forall i$-re. Tetszőleges B eseményre:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$$

Definíció I.4 A és B függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$, vagy $P(B|A) = P(B)$ vagy $P(AB) = P(A)P(B)$.
$\big(P(AB) = \underbrace{P(A|B)}_{P(A)} P(B) = P(A)P(B) \big)$

Tétel I.5 A és B függetlenek, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B, $\overline{B}$ és A is függetlenek.
Bizonyítás: Elég A és $\overline{B}$-re belátni: $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Rightarrow$
$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(\overline{B})$

Tétel I.6 $\emptyset$ és Ω minden más eseménytől függetlenek.
Bizonyítás: $P(A \cdot \Omega) = P(A) = 1 \cdot P(A) = P(\Omega)P(A)$
Bizonyítás: $P(A \cdot \emptyset) = P(\emptyset) = 0 \cdot P(A) = P(\emptyset)P(A)$

Definíció I.5 $A_1, A_2, \dots A_n$ események páronként függetlenek, ha
$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i, j$-re$(i \neq j)$.

Definíció I.6 $A_1, A_2, \dots A_n$ események teljesen függetlenek, ha bármely k e-lemet kiválasztva $(2 \leq k \leq n) \quad \forall 1 \leq j_1 < j_2 \dots < j_k \leq n$-re
$P(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_k})$

A teljes függetlenségből következik a páronkénti is, de fordítva általában nem igaz.

Chapter 6

A valószínűségi változó

Definíció I.7 Az X $(\Omega \to R)$ elemi eseményeken értelmezett függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha $A = \{\omega, X(\omega) \in \mathcal{B}^1\}$ megfigyelhető esemény.

A valószínűség változó eloszlásán(Q_x) azt a [0,1] értékkészletü halmazfüggvényt értjük, amely megegyezik a valószínűségi változó egy halmazba esésének valószínűségével. Az eloszlás egyértelműen meghatároz egy eloszlásfüggvényt, és fordítva.

Definíció I.8 *Eloszlásfüggvényen* az $F_X(x) = Q_x\big((-\infty, x)\big) =$
$= P\big(\{X(\omega) \in (-\infty, x)\}\big) = P(X < x)$ függvényt értjük, ami $R \to [0,1]$-re képez.

F_x tujaldonságai:

1. Monoton nő. $x > y$ esetén $F_X(x) \geq F_X(y)$, mert $(-\infty, x) \supset (-\infty, y) \quad \Rightarrow$ $\underbrace{\{\omega, X(\omega) \leq y\}}_{a} \Rightarrow \underbrace{\{X(\omega) \leq x\}}_{b} \Rightarrow \underbrace{P(a)}_{F_X(y)} \leq \underbrace{P(b)}_{F_X(x)}$
2. Balról folytonos.
$$\lim_{y \to x-0} F_X(y) = F_X(x)$$
3.
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$P(a \leq x < b)$ valószínűség értéke: $X \in [a, b) \quad (-\infty, b) = (-\infty, a) \bigcup [a, b)$

$$P(X \in (-\infty, b)) = P(X \in (-\infty, a)) + P\big(X \in [a, b)\big) \Rightarrow$$

$$P(a \leq x < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$$

[1] Borel-halmaz

$$P(a \leq x \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a)$$
$$P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a+0)$$
$$P(a < x \leq b) = F_X(b+0) - F_X(a+0)$$

6.1 Diszkrét eloszlás

Definíció I.9 X, illetve eloszlása *diszkrét*, ha X megszámlálhatóan sok értéket vehet csak fel.

$X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\} \quad \forall \omega \in \Omega$
Ilyenkor $P_i = P(X = X_i) = P\big(\{\omega : X(\omega) = x_i\}\big)$ valószínűségekkel írjuk le az eloszlást.

$$P(X \in E) = \sum_{x_i \in E} P_i$$
$$F_X(x) = P\big(X \in (-\infty, x)\big) = \sum_{x_i < x} P_i$$

Az eloszlásfüggvény lépcsős függvény, mely az x_i pontokban ugrik, és nagysága éppen P_i. $0 \leq P_i \leq 1$, hiszen valószínűség, és $\sum_i P_i = 1$.

Nevezetes diszkrét eloszlások:

1. Indikátoreloszlás: $A \in \mathcal{F} \quad p = P(A) > 0$ esemény, amire
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ ha } A \text{ bekövetkezik, } \omega \in A \\ 0, \text{ ha } A \text{ nem következik be, } \omega \notin A \end{cases}$$
$p_0 = P(X = 0) = P\big(\{\omega : \omega \in \Omega \setminus A\}\big) = P(\overline{A}) = 1 - p$
$p_1 = P(X = 1) = P\big(\{\omega : \omega \in A\}\big) = P(A) = p$
Jele: I_A

2. Binomiális eloszlás: n-szeres kísérletsorozat, $A \in \mathcal{F} \quad p = P(A) > 0$ esemény, ahol
$$X = A \text{ bekövetkezéseinek száma, } X \in \{0, 1, \ldots, n\}$$
$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Könnyen belátható a binomiális tétel segítségével, hogy valóban eloszlásról van szó, hiszen az összes $0 \leq k \leq n$ egészre összegezve 1-et kapunk.
Jele: B(n,p): n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlás.
$\big($ B(1,p)= $I_A\big)$ Eloszlás móduszának nevezzük azt a k. tagot, amire p_k a legnagyobb érték amit az eloszlás felvehet. Binomiális eloszlás esetén a módusz [(n+1)p] (Ha egész, akkor a módusz egyenlő k = (n+1)p-1 értékével így két módusz van).

3. Poisson eloszlás: $Po(\lambda)$ λ paraméterű eloszlás, ahol $X \in \{0, 1, \ldots\}$.

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0$$

   e^{λ} Taylor sorának segítségével egyszerűen belátható, hogy eloszlásról van szó. Módusza a $[\lambda]$. tag (egész érték esetén λ-1. tag is.)

4. Geometriai eloszlás: $G(p)$ p paraméterű eloszlás, ahol $X \in \{0, 1, \ldots\}$. Adott $p = P(A) > 0$ valószínűségű A esemény első bekövetkezéséig végrehajtott kísérletek száma X.

$$p_k = P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

   A geometriai sor konvergenciáját kihasználva megmutatható, hogy eloszlás. Módusza p_1

Tétel I.7 Ha $(n \to \infty), (p \to 0)$, úgy, hogy np =állandó. Ekkor $B(n,p) \to Po(np)$, vagyis $\forall k$-ra a binomiális eloszlás k-adik tagja tart a Poisson eloszlás k-adik tagjához.
Bizonyítás:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k! n^k} n^k p^k \frac{\left(1 - p\frac{n}{n}\right)^n}{(1-p)^k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{1} \frac{(np)^k}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{np}{n}\right)^n}_{e^{-np}} \underbrace{\frac{1}{(1-p)^k}}_{1} \to \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = Po(np)_k$$

Tétel I.8 Geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága:
$\forall k, m \quad P(X = m + k \mid X > m) = P(X = k)$
Bizonyítás:

$$P(X = m + k \mid X > m) = \frac{P(X = m + k, X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X = m + k)}{P(X > m)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{m+k-1} p}{\sum_{l=m+1}^{\infty} (1-p)^{l-1} p} = \frac{(1-p)^{m+k-1} p}{(1-p)^m \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} (1-p)^{l-1} p}_{1}} = (1-p)^{k-1} p = P(X = k)$$

6.2 Folytonos eloszlások

Definíció I.10 X valószínűségi változó, illetve eloszlása *folytonos*, ha $\exists\, f_X(x) \geq 0$ sűrűségfüggvény $\forall a, b \in R$

$$P\big(X \in (a,b)\big) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Ha a = $-\infty$, b = x, akkor $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.
Sűrűségfüggvény $(-\infty, \infty)$ intervallumon vett integrálja 1.
Folytonos esetben $\forall P(X = a) = 0$, így

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$$

Az eloszlásfüggvény deriváltja a sűrűségfüggvény: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
Nevezetes folytonos eloszlások:

1. Egyenletes eloszlás: U(a,b)-val jelölt eloszlás [a,b]-n egyenletes.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a,b] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } x \in [a,b] \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases}$$

Egy Δ hosszú intervallum valószínűsége csak az intervallum hosszától függ:

$$P\big(X \in (c, c+\Delta)\big) = F_X(c+\Delta) - F_X(c) = \frac{(c+\Delta) - a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{\Delta}{b-a}$$

2. Exponenciális eloszlás: E(λ), λ paraméterű eloszlás, $\lambda > 0$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A folytonos eloszlások közül az exponenciális az egyetlen örökifjú. Ebből csak azt látjuk be, hogy az exponenciális örökifjú tulajdonsággal rendelkezik:

$$P(X < s+t | X \geq s) = P(X < t)$$

$$\frac{P(X < s+t | X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(s \leq X < s+t)}{P(X \geq s)} = \frac{F(s+t) - F(s)}{1 - P(X < s)} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda(s+t)} - (1 - e^{-\lambda s})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda t} =$$

$$= F(t) = P(X < t)$$

3. Normális eloszlás: N(μ, σ) μ és σ paraméterű, ahol $\mu, \sigma \in R$ és $\sigma > 0$

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ez az úgynevezett haranggörbe. Az eloszlásfüggvény:

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u$$

Standard normális eloszlás: N(0,1), $\mu = 0, \sigma = 1$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

φ *tulajdonságai:*

(a) Páros függvény: $\varphi(-t) = \varphi(t)$

(b)

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$$

(c) $t = 0$ - ban van a maximuma, ami $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt = 1$$

Φ *tulajdonságai:*

(a) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, mert

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x}\varphi(t)dt = 1 - \int_{-x}^{\infty}\varphi(t)dt = 1 - \int_{-\infty}^{x}\varphi(-t)dt =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt \ = 1 - \Phi(x)$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0, \lim_{x\to\infty}\Phi(x) = 1, \text{ mert eloszlásfüggvény.}$$

(c) Szigorúan monoton nő, mert deriváltja $\varphi(x)$, ami sehol sem negatív.

Chapter 7

A valószínűségi változó transzformációja

Definíció I.11 *A valószínűségi változó transzformációján* egy t függvényt értünk, amely egy X valószínűségi változó értékkészletéről, egy Y valószínűségi változó értékkészletére képez. Ha X diszkrét, akkor Y is csak diszkrét lehet, fordítva előfordulhat, hogy folytonos valószínűségi változót diszkrétté transzformálunk, ezt hívjuk diszkretizálásnak, továbbiakban példát is fogunk látni rá.

Példa diszkrét transzformációra:
Ha $X \sim B(n,p)$ és $t(x) = n - x$ akkor

$$P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k) =$$

$$= \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} =$$

$$= \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^{k} \Rightarrow Y \sim B(n, 1-p)$$

Példa folytonos transzformációra:
X standard normális eloszlás, és $t(x) = X^2$.

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) =$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\left(\Phi(\sqrt{y})\right) - 1$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \quad y \geq 0$$

Általánosságban véve a dolgot, azt mondhatjuk, hogy:

- Ha t szigorúan monoton nő:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < t^{-1}(y)) = F_X(t^{-1}(y))$$

- Ha t szigorúan monoton csökken:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X > t^{-1}(y)) = 1 - P(X < t^{-1}(y)) = 1 - F_X(t^{-1}(y))$$

A sűrűségfüggvény pedig $f_Y(y) = f_X(t^{-1}(y)) \left|\frac{dt^{-1}(y)}{dy}\right|$, ahol az érték pozitív, ha t szigorúan monoton növő, és negatív, ha szigorúan monoton csökkenő függvény.

Tétel I.9 U egyenletes a [0,1] intervallumon és $F(y)$ tetszőleges szigorúan monoton növő eloszlásfüggvény, akkor az $Y = F^{-1}(U)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(y)$ lesz.

Tétel I.10 X szigorúan monoton növő $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó, akkor az $U = F(X)$ egyenletes eloszlású lesz a [0,1] intervallumon.

Definíció I.12 *Lineáris transzformációnak* hívjuk az $Y = aX + b$ valószínűségi változó transzformációt.$(a, b \in R)$

Standard normális valószínűségi változón elvégzett $Y = \sigma X + \mu$ transzformáció μ és σ paraméterű normális eloszlást hoz létre:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} du = \Phi_{\mu,\sigma}(y) \Rightarrow Y \sim N(\mu, \sigma)$$

A levezetés során felhasználtuk a $t = \frac{u-\mu}{\sigma}$ és a $dt = \frac{1}{\sigma} du$ helyettesítéseket.

Diszkretizálás során folytonos valószínűségi változóból diszkrétet készítünk egy traszformáció során. Ilyen transzformáció például a $t(x) = [X] + 1$ függvény az $X \sim E(\lambda)$ esetben, melynél:

$$P(\lambda = k) \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{k-1}^{k} = e^{-\lambda(k+1)} - e^{-\lambda k} =$$

$$= \left(1 - (1 - e^{-\lambda})\right)^{k-1} \left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

$G(1 - e^{-\lambda})$ geometirai eloszlás jön létre.

Chapter 8

Várható érték

- **Definíció I.13** Ha a $\sum |x_i| P(X = x_i)$ sor konvergens akkor $\exists$ *várható érték* és értéke:
$$EX = \sum_i x_i P(X = x_i)$$
- **Definíció I.14** Ha a $\int |x| f_X(x)dx < \infty$ akkor $\exists$ *várható érték* és értéke:
$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$Y = t(x)$ esetén :

$$EY = \sum_i t(x_i)P(X = x_i) \quad \text{diszkrét és } EY = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) f_X(x)dx$$

folytonos esetben. Ennek sepciális esete a lineáris transzformáció ($Y = aX + b$), amire: (csak folytonosra bizonyítva, diszkrétre a módszer azonos)

$$EY = E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} a\, x\, f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b\, f_X(x)dx =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \ a\ EX + b$$

8.1 Nevezetes eloszlások várható értéke:

$$EX \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{,ha } X \in I_A(p) \\ np & \text{,ha } X \in B(n,p) \\ \lambda & \text{,ha } X \in Po(\lambda) \\ \frac{1}{p} & \text{,ha } X \in G(p) \end{array} \right\} \text{diszkrét esetben.}$$

$$EX = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{b+a}{2} & \text{,ha } X \in U(a,b) \\ \frac{1}{\lambda} & \text{,ha } X \in E(\lambda) \\ \mu & \text{,ha } X \in N(\mu,\sigma) \end{array} \right\} \text{ folytonos esetben.}$$

Mindkét esetben könnyen levezethetjük a megfelelő értékeket, ha felhasználjuk a várható érték definícióját diszkrét vagy folytonos esetben, illetve a megfelelő változók eloszlásait vagy sűrűségfüggvényeit.
A várható értéket nevezik másnéven *első momentumnak* is. Létezik természetesen n-edik momentum is, amit a következőképp definiálhatunk:

$$\mu_n(x) = E\left(X^n\right) \begin{array}{lll} \nearrow & \sum_{x\in\chi} x^n P(X=x) & \text{diszkrét esetben.} \\ \searrow & \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx & \text{folytonos esetben.} \end{array}$$

Van konstansra vonatkozó n-edik momentum:$E\left[(X-c)^n\right]$ a c-re vonatkozó n-edik momentum. $c = EX$ esetén beszélünk centrális momentumról: $E\left[(X-EX)^n\right]$. Második centrális momentum speciális tulajdonságokkal bír, ezt nevezzük szórásnégyzetnek.

Chapter 9

Szórásnégyzet

Definíció I.15 *Szórásnégyzetnek* nevezzük a $\sigma^2(x) = E\left[X - EX\right]^2$ értéket.

Ha valaminek nincs várható értéke, akkor ebből adódóan szórásnégyzete sincs. A szórásnégyzetet felírhatjuk úgy mint az $(X - EX)^2$ várható értékét, felhasználva valószínűségi változó transzformációjának várható értékére vonatkozó állításunkat, a várható érték definíciójában x helyére $(x - EX)^2$ kerül. A szórás a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke.
Szórásnégyzet tulajdonságai:

1. $\sigma^2(X) = E\left[(X-a)^2\right] - \big(E(X-a)\big)^2 = EX^2 - (EX)^2 \quad \forall a$-ra (Steiner-tétel)
2. $E(X-a)^2 \geq \sigma^2(x) = E(X-EX)^2 \quad \forall a \in R$
3. $\sigma^2(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \sigma^2(X) \quad \forall \alpha, \beta \in R$
4. $\sigma^2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in R \quad P(X = c) = 1$ és $c = EX$.

Bizonyítás:

1. $$E(X-a)^2 = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2aEX + a^2$$
   $E(X-a) = EX - a \Rightarrow (E(X-a))^2 = (EX-a)^2 = (EX)^2 - 2aEX + a^2$
   A kettő különbsége éppen $E(X^2) - (E(X))^2$. Ha a helyére $E(X)$-et írunk visszakapjuk $\sigma^2(X)$ értékét.
2. $E(X-a)^2 = \sigma^2(X) + \underbrace{(E(X-a))^2}_{\geq 0} \geq \sigma^2(X)$
3. $$\sigma^2(\alpha X + \beta) = E(\alpha X + \beta)^2 - \big(E(\alpha X + \beta)\big)^2 =$$
   $$\alpha^2 EX^2 + 2\alpha\beta EX + \beta^2 - \alpha^2 (EX)^2 - 2\alpha\beta EX - \beta^2 = \alpha^2\big(EX^2 - (EX)^2\big) = \alpha^2 \sigma^2 X$$

4. $\Leftarrow (c-c)^2 + 0 = \sigma^2(X) = 0$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = 0 \Rightarrow E(X-EX)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left((X-EX)^2 = 0\right) = 1 \Rightarrow P(X-EX) = 1$$

Definíció I.16 *Standardizált változónak* nevezzük az: $\tilde{X} = \frac{X-EX}{\sigma X}$ értéket. $E\tilde{X} = 0, \sigma\tilde{X} = 1$.

Tétel I.11 Markov egyenlőtlenség Legyen X valószínűségi változó, $X \geq 0$ és $\exists\ EX(\geq 0)$, tetszőleges $\lambda > 0$ ($\lambda \in R$) számra $P(X > \lambda) \leq \frac{EX}{\lambda}$
Bizonyítás:

$$EX = \int_0^\infty x f_X(x)dx \geq \int_\lambda^\infty x f_X(x)dx \geq \int_\lambda^\infty \lambda f_X(x)dx =$$
$$= \lambda(1 - F_X(\lambda)) = \lambda P(X > \lambda)$$

Diszkrét esetre a bizonyítás teljesen analóg a folytonossal, előbb az összegzést kell szűkíteni, majd az x-et kicserélni a nála kisebb λ-ra.

Tétel I.12 Csebisev egyenlőtlenség Legyen X valószínűségi változó, $X \geq 0$ és $\exists\ \sigma X$, tetszőleges $\lambda > 0$ ($\lambda \in R$) számra $P(|X-EX| > \lambda) \leq \frac{\sigma^2 X}{\lambda^2}$
Bizonyítás:

$Y = (X-EX)^2 \geq 0 \Rightarrow \exists EY = E(X-EX)^2 = \sigma^2 X \Rightarrow$ Markov egyenlőtlenség fennáll Y-ra

$$\text{Legyen } \lambda^2 > 0. P(Y \geq \lambda^2) \leq \frac{EY}{\lambda^2} \Leftrightarrow P\left((X-EX)^2 \geq \lambda^2\right) \leq \frac{\sigma^2 X}{\lambda^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(|X-EX| > \lambda) \leq \frac{\sigma^2 X}{\lambda^2}$$

9.1 Nevezetes eloszlások szórása:

$$\sigma X = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{p(1-p)} & \text{,ha } X \in I_A(p) \\ \sqrt{np(1-p)} & \text{,ha } X \in B(n,p) \\ \sqrt{\lambda} & \text{,ha } X \in Po(\lambda) \\ \frac{\sqrt{1-p}}{p} & \text{,ha } X \in G(p) \end{array} \right\} \text{diszkrét esetben.}$$

$$\sigma X = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{b-a}{\sqrt{12}} & \text{,ha } X \in U(a,b) \\ \frac{1}{\lambda} & \text{,ha } X \in E(\lambda) \\ \sigma & \text{,ha } X \in N(\mu,\sigma) \end{array} \right\} \text{folytonos esetben.}$$

Az értékek ebben az esetben is egyszerűen levezethetők Steiner tételének használatával.

Chapter 10

Több valószínűségi változó együttes vizsgálata

Definíció I.17 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ és $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ valószínűségi változók, ekkor a $P(X = x_i, Y = y_j)$ valószínűségek összességét X és Y együttes eloszlásának nevezzük.

Definíció I.18 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ és $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ valószínűségi változók, ekkor a

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j)$$

valószínűségek összességét X vetületi, vagy peremeloszlásának nevezzük.

Több valószínűségi változó esetén is létezik peremeloszlás egy és több elemnek is. A módszer ugyanaz, azon valószínűségi változók szerint szummázunk, amelyekre nem vagyunk kíváncsiak.

Definíció I.19 $X_1, X_2, \ldots, X_d$ valószínűségi változók esetén az

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_d < x_d)$$

valószínűséget az $X_1, X_2, \ldots, X_d$ *együttes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

$X_1, X_2, \ldots, X_d$ helyettesíthető egy darab vektor értékű valószínűségi változóval.
$\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$
$F_{X_1, X_2, \ldots, X_d}$ tujaldonságai:

1. Minden változójával monoton nő.

$$F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d) \leq F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i', \ldots x_d) \quad \text{, ha } x_i < x_i'$$

   $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$

2. Minden változójával balról folytonos.

3. Ha tetszőleges változójával a $-\infty$-be tartunk, akkor 0-hoz tart, Ha $\forall$ változójával a ∞-be tartunk, akkor 1-hez tart

Két változó esetén a T téglalapba esés valószínűsége az együttes eloszlásfüggvényekkel írható fel:

$$P\left((X,Y) \in T\right) = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) =$$
$$= F_{X,Y}(a,c) + F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c)$$

Létezik, mint eloszlás esetében, *vetületi, vagy perem-eloszlásfüggvény* is:

Definíció I.20 $X_1, X_2, \ldots, X_d$ valószínűségi változók. Tetszőleges k-ra $(1 \leq k \leq d)$ a $j_1, \ldots j_k$ indexkombinációra, az $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots X_{j_k}$ együttes eloszlása k dimenziós vetületi eloszlásfüggvény.

Tétel I.13 Az együttes eloszlásfüggvény meghatározza az összes vetületi eloszlásfüggvényt, de fordítva nem igaz, az összes vetületi eloszlásfüggvény sem határozza meg az együttest.

Például d = 2-re:

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$$

Több változó esetén is hasonló a helyzet. Azokkal, amelyek nem szerepelnek a vetületi eloszlásfüggvényben, a végtelenbe tartunk.

Folytonos esetben az eloszlásfüggvényen kívül létezik sűrűségfüggvény is.

Definíció I.21 (X,Y), illetve eloszlásuk folytonos, ha $\exists f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ a sík minden E részhalmazára, és

$$P\left((X,Y) \in E\right) = \iint_E f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

ahol $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvény.

Az együttes eloszlásfüggvényt megkapjuk a következőképpen:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dvdu$$

Fordítva parciális deriválással juthatunk a sűrűségfüggvény értékéhez:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

A vetületi sűrűségfüggvényeket megkaphatjuk, hogyha az együttes sűrűségfüggvényt a $(-\infty, \infty)$ intervallumon kiintergáljuk a másik változó szerint, tehát $f_X(x)$-hez y-szerinti, $f_Y(y)$-hoz x szerinti integrálással juthatunk. Több dimenzióban is hasonlóan működik az együttes sűrűségfüggvényből a perem sűrűségfüggvények előállítása, vagyis azok szerint integrálunk, amelyek értéke nem lesz benne a vetületi sűrűségfüggvényben. Az együttes sűrűségfüggvény összes változója szerinti $(-\infty, \infty)$ intervallumokon vett d-szeres integrálja 1.

Definíció I.22 X és Y függetlenek, ha $\forall a, b, c, d \in R$
$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d)$

Definíció I.23 X és Y függetlenek, ha $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

A két definíció ekvivalens egymással. X és Y valószínűségi változók esetén, diszkrét esetben függetlenek, ha
$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)P(Y = y_i)$, folytonos esetben pedig, ha $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Több valószínűségi változó esetén van páronkénti és teljes függetlenség.

Definíció I.24 $X_1, X_2, \ldots X_n$ páronként függetlenek, ha X_i és X_j független $\forall i, j$-re.

Definíció I.25 $X_1, X_2, \ldots X_n$ teljesen függetlenek, ha bármely k elemet kiválasztva $(2 \leq k \leq n)$ $\forall\ j_1, j_2, \ldots, j_k$ indexkombinációra
$F_{X_{j_1} \ldots X_{j_k}}(x_{j_1} \ldots x_{j_k}) = F_{X_{j_1}}(x_{j_1})F_{X_{j_2}}(x_{j_2}) \ldots F_{X_{j_k}}(x_{j_k})$

A teljes függetlenségből következik a páronként függetlenség, fordítva általában nem igaz.

Chapter 11

Valószínűségi változók összege

11.1 Diszkrét esetben

X és Y diszkrét valószínűségi változók, $X, Y \geq 0$, és egészek. $Z = X + Y$.

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) =$$

$$\underbrace{=}_{fuggetlenek} \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i)$$

Példa erre ha $X \sim Po(\lambda)$ és $Y \sim Po(\mu)$ és függetlenek. Ekkor a $Z = X + Y$ eloszlása $Po(\lambda + \mu)$.

11.2 Folytonos esetben

Ha folytonosak, akkor

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, z - t)dt \underbrace{=}_{fuggetlenek} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z - t)dt$$

$X, Y \in E(\lambda)$ független valószínűségi változók esetén $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$
n változó esetén $f_Z(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z}$

11.3 Összeg várható értéke

Egyszerűen bizonyítható, hogy $X_1, X_2, \ldots X_n$ valószínűségi változók esetén az összeg várható értéke, a várható értékek összege, jelben:

$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n$

Tétel I.14 $X_1, X_2, \ldots X_n$, $Y = g(X_1, X_2, \ldots X_n)$. Y várható értéke:

- Diszkrét esetben: $EY = Eg(X_1, X_2, \ldots X_n) =$ $\sum\sum \ldots \sum g(X_1, X_2, \ldots X_n) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$
- Folytonos esetben: $EY = Eg(X_1, X_2, \ldots X_n) =$ $\int \ldots \int g(X_1, X_2, \ldots X_n) f_{X_1, X_2, \ldots X_n}(X_1, X_2, \ldots X_n) dx_1, dx_2, \ldots dx_n$

Tétel I.15 Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Bizonyítás:(Csak folytonosra bizonyítjuk, diszkrétre a levezetés analóg.)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx}_{EX} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy}_{EY}$$

Tétel I.16 X és Y függetlenek és $\exists$ szórásnégyzetük: $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y$

A bizonyítás Steiner tételének felírásával egyszerűen levezethető, ha felírjuk az összeg szórásnégyzetére.

Definíció I.26 X és Y valószínűségi változók *kovarianciáján* az $E\big((X - EX)(Y - EY)\big)$ értéket értjük.

$$cov(X, Y) = E\big((X - EX)(Y - EY)\big) = E(XY + EXEY - XEY - YEX) =$$

$$= E(XY) + EXEY - EXEY - EYEX = E(XY) - EXEY$$

$\Rightarrow \sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y \pm 2cov(X, Y)$, $cov(X, X) = \sigma^2 X$.

Definíció I.27 *Korrelációs együtthatónak* nevezzük az $R(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma X \sigma Y}$-t.

Definíció I.28 X és Y korrelálatlanok, ha $cov(X, Y) = 0$ vagy $R(X, Y) = 0$.

Tétel I.17 Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor korrelálatlanok, de fordítva általában nem igaz.

Tétel I.18 Ha $a, b \in R$, akkor $cov(aX + bY, Z) = acov(X, Z) + bcov(Y, Z)$

Bizonyítás:

$$E((aX + bY) \cdot Z) = E(aXZ + bYZ) = aE(XZ) + bE(YZ)$$

$$E(aX + bY)EZ = (aEX + bEY)EZ = aEXEZ + bEYEZ$$

$$cov(aX + bY, Z) = a\underbrace{(EXZ - EXEZ)}_{cov(X,Z)} + b\underbrace{(EYZ - EYEZ)}_{cov(Y,Z)}$$

Tétel I.19 $-1 \leq R(X, Y) \leq 1$

$\Rightarrow |cov(X, Y)| \leq \sigma X \sigma Y$

Tétel I.20

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 X + 2 \sum_{j>i} cov(X_i, X_j)$$

Több valószínűségi változó, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, vagy $\underline{\mathrm{X}} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ kovarianciamátrixa:

$$\begin{bmatrix} cov(X_1, X_1) & cov(X_1, X_2) & \ldots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & cov(X_2, X_2) & \ldots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \ldots & cov(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Chapter 12

Feltételes eloszlás

Definíció I.29 $A \in \mathcal{F}, P(A) > 0$ eseményre $F_X(x|A) = P(X < x|A) = \frac{P(X<x,A)}{P(A)}$ valószínűséget az X A-ra vonatkozó feltételes eloszlásának nevezzük. Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók, akkor a
$P(X = x_i|Y = y_i)$ valószínűséget az X-nek az Y-ra vonatkoztatott feltételes eloszlásának nevezzük.

Az eloszlásfüggvény definíciójából egyszerűen levezethető, hogy:

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$$

Folytonos esetben a feltételes sűrűségfüggvény ennek az eloszlásfüggvénynek a deriváltja:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x}}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Ez utóbbi miatt $f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$, és ha X és Y függetlenek, akkor $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$, és $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$. Mindkét esetben érvényes marad teljes valószínüség tétele, mely szerint:

$$F_X(x) = \sum_i F_X(x|A_i) P(A_i)$$

$$f_X(x) = \sum_i f_X(x|A_i) P(A_i)$$

ahol A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak.

Chapter 13

Feltételes várható érték

Definíció I.30 Az X valószínűségi változó A eseményre vonatkoztatott *feltételes várható értéke* diszkrét esetben $\sum x_i P(X = x_i|A)$, folytonos esetben $\int x f_X(x|A)dx$.

Ha A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak, akkor a teljes valószínüség tétele itt is alkalmazható:

$$EX = \sum_i E(X|A_i)P(A_i)$$

Definíció I.31 X-nek az Y-ra vonatkozó várható értékén, vagy *regresszióján* az $E(X|Y) = r(Y)$ *értéket értjük, ahol* $r(y) = \int x f_{X|Y}(x,y)dx$ *folytonos esetben, míg* $r(y) = \sum x P(X = x_i|Y = y_i)$ *diszkrét esetben.*

Regresszió tulajdonságai:

- $E\left(E(X|Y)\right) = \int f_Y(y)r(y)dy = \int \left(\int x f_{X|Y}(x|y)dx\right) f_Y(y)dy =$

  $= \iint x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)dydx = \int x \left(\int f_{X,Y}(x,y)dy\right) dx = \int x f_X(x)dx = EX$

- $E(h(y)X|Y) = h(y)E(X|Y)$, mert $\forall$y-ra $E(h(Y)X|Y = y) =$
  $= \int h(Y)x f_{X|Y}(x|y)dx = h(Y)\int x f_{X|Y}(x|y)dx = h(Y)E(X|Y = y)$

- Ha X és Y függetlenek, akkor $E(X|Y) = EX$, mert $\forall$y-ra $E(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y)dx = \int x f_X(x)dx = EX$

Tétel I.21 Bármely $d(Y)$ függvényre igaz, hogy $E\left(X - d(Y)\right)^2 \geq E\left(X - r(Y)\right)^2$, ahol r(Y) a regressziós függvény.

Normális eloszlás esetén a regresszió lineáris. $E(X|Y = y) = aY + b$, ahol $a = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f$, és $b = \mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} f \mu_2$

Definíció I.32 X és Y valószínűségi változók lineáris regresszióján, azt az $a^*Y + b^*$ valószínűségi változót értjük, amire, $E(X - (a^*Y + b^*))^2$ minimális értékű. Deriválás használatával egyszerűen levezethető, hogy $a^* = R(X,Y)\frac{\sigma X}{\sigma Y}$ illetve $b^* = EX - a^*EY$.

Chapter 14

Nagy számok törvénye

Az előző fejezetekből már ismert a relatív gyakoriság értéke, r_n(A)=$\frac{k_A}{n}$, aminek határértéke a P(A) valószínűség, ahol k_A az A bekövetkezéseinek száma n kísérletből.

Definíció I.33 X_n valószínűségi változó sorozat *egy valószínűséggel konvergál* az X-hez, ha

$$P\big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = X(\omega)\big) = 1$$

jelben :

$$X_n \stackrel{1v}{\to} X$$

Definíció I.34 X_n valószínűségi változó sorozat *sztochasztikusan konvergál* az X-hez, ha

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\big) = 0$$

jelben :

$$X_n \stackrel{st}{\to} X$$

Definíció I.35 X_n valószínűségi változó sorozat *eloszlásban konvergál* az X-hez, ha

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \ \forall x \in R - re,$$

ahol $F_X(x)$ folytonos, jelben :

$$X_n \stackrel{e}{\to} X$$

Tétel I.22 <u>A Nagy számok törvényének Bernoulli féle gyenge alakja:</u>
Legyenek X_i (i = 1,2,...,n) valószínűségi változók függetlenek és azonos indikátor eloszlásúak
$(EX_i = p)$. Ekkor

$$r_n(A) \stackrel{st}{\to} P(A)$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|r_n(A) - P(A)| > \varepsilon\big) = 0 \ \forall\varepsilon > 0$$

Bizonyítás:

$$E(r_n(A)) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n} nP(A) = P(A)$$

$$\sigma^2(r_n(A)) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 x_i = \frac{1}{n^2} nP(A)(1-P(A)) =$$

$$= \frac{P(A)(1-P(A))}{n}$$

$$P(|r_n(A) - P(A)| > \varepsilon) = P\big(|r_n(A) - E(r_n(A))\big| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2(r_n(A))}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{P(A)(1-P(A))}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

ha n $\to \infty$

Tétel I.23 A Nagy számok törvényének Csebisev féle gyenge alakja:
Legyenek X_i (i = 1,2,...) valószínűségi változók függetlenek, és azonos eloszlásúak.$\exists$ közös várható értékük($EX_i = \mu$) és közös szórásnégyzetük. Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, akkor

$$Z_n \overset{st}{\to} \mu$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|Z_n - \mu| > \varepsilon\big) = 0 \ \forall\varepsilon > 0$$

Bizonyítás:

$$E(Z_n) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} nEX_i = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$\sigma^2(Z_n) = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 X_i = \frac{1}{n^2} nd^2 = \frac{d^2}{n}$$

$$P\big(|Z_n - EZ_n| \ge \varepsilon\big) = P\big(|Z_n - \mu| \ge \varepsilon\big) \le \frac{\sigma^2 Z_n}{\varepsilon^2} = \frac{d^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

ha n $\to \infty$

Tétel I.24 A Nagy számok törvényének Kolmogorov féle erős alakja:
Legyenek X_i (i = 1,2,...) valószínűségi változók teljesen függetlenek. $\exists$ közös

várható értékük ($EX_i = \mu$) és szórásnégyzetükre $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 X_i \frac{1}{i^2} < \infty$. $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$, amire

$$Z_n \stackrel{1v}{\to} \mu$$

vagyis

$$P\left(\lim_{n\to\infty} Z_n = \mu\right) = 1$$

Tétel I.25 Centrális határeloszlási tétel:
Legyenek X_i (i = 1,2,...) valószínűségi változók páronként függetlenek, és azonos eloszlásúak. $\exists$ közös várható értékük($EX_i = \mu$) és közös szórásnégyzetük. $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$-re

$$Z_n \stackrel{e}{\to} Z$$

, ahol $Z \in N(0,1)$ vagyis

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \Phi(x)$$

$(n \to \infty) \quad \forall x \in R$

Tétel I.26 Moivre-Laplace tétel:
Legyenek X_i (i = 1,2,...) valószínűségi változók függetlenek, és azonos indikátor eloszlásúak. $\exists$ közös várható értékük($EX_i = p$) és közös szórásnégyzetük (p(1-p)). Ekkor $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$-re

$$Z_n \stackrel{e}{\to} Z$$

, ahol $Z \in N(0,1)$ vagyis

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \Phi(x)$$

$(n \to \infty) \quad \forall x \in R$

Chapter 15

Markov-láncok

Legyen az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változó sorozat. Általában az n-edik valószínűségi változó függ, az előzőektől. Egyszerűbb eset, hogyha csak az őt megelőző néhánytól függ. Ennek speciális esete, ha csupán az őt közvetlenül megelőzőtől függ, ekkor beszélünk Markov-láncról.

Definíció I.36 $X_1, X_2, \ldots, X_n \in$ S-állapottér esetén, ha $\forall n \geq 1$-re

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$

akkor a valószínűségi változó sorozat *Markov-lánc.*

Átmenet valószínűségnek nevezzük azt a valószínűséget, mely megmondja, hogy egy állapotból, valamelyik másik állapotba milyen valószínűséggel jutunk. Például a P($X_n = 2$ — $X_n - 1 = 3) = 1/2$ annak a valószínűsége, hogy ha az n-1-edik állapot a 3, az n edik állapot, a 2 lesz. Az átmenet valószínűségek általában függenek n-től(időtől). Ha az átmenet valószínűségek függetlenek az n-től, akkor stacionáriusnak nevezzük őket, a Markov-láncot pedig homogénnek. Homogén Markov-láncot egyértelműen meghatározza kezdeti eloszlása, vagyis bármelyik állapotának eloszlása.

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

$\forall$ n-re, ha a Markov-lánc homogén.

Definíció I.37 Legyen a $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók által alkotott valószínűségi változó sorozat Markov-lánc. Ekkor a Markov-lánc Π,úgynevezett *átmenetvalószínűség mátrixán* egy mátrixot értünk, amire

$$[\Pi]_{ij} = P_{ij} = P(X_1 = j, X_0 = i) \quad (i, j \in S)$$

Definíció I.38 Legyen a $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók által alkotott valószínűségi változó sorozat Markov-lánc. Ekkor a Markov-lánc $[\Pi]^n$,úgynevezett *n lépéses átmenetvalószínűség mátrixán* egy mátrixot értünk, amire

$$[\Pi]_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_0 = i) \quad (i, j \in S)$$

A mátrix méretét az állapotok száma adja, ha $|S| = k \Rightarrow$ k*k-as a mátrix.

Definíció I.39 *Kezdeti eloszlás sorvektorának* nevezzük a $P^{(0)}$ értéket, ha $P_i^{(0)} = P(X_0 = i),\ \forall(i \in S)$

Definíció I.40 *n-edik abszolút eloszlás sorvektorának* nevezzük a $P^{(n)}$ értéket, ha $P_i^{(n)} = P(X_n = i),\ \forall(i \in S)$

A kezdeti és n-edik abszolút eloszlás sorvektorai kapcsolatban állnak egymással: $P^{(n)} = P^{(0)}\Pi^n$

Tétel I.27 Chapmann-Kolmogorov tétel:

$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(i)}\Pi^{(n-i)} = \Pi^n \quad \forall i\text{-re}$$

ahol $\Pi^{(n)}$ a fenti által definiált n-lépéses átmenetvalószínűség mátrix, míg Π^n a fönti definícióval leírt átmenetevalószínűség mátrix n-edik hatványa.

Definíció I.41 A $P^{(\infty)} = limP(n)$ értéket *határeloszlásnak* nevezzük, ha létezik. Értéke nem függ P^0-tól, és eloszlás.

A határeloszlás nem függ a kezdeti eloszlástól, tehát $P^{(\infty)}$ nem függ $P^{(0)}$-tól. A határeloszlásra továbbá igaz, hogy:

$$P^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{n\to\infty}(P^{(n-1)}\Pi) = \left(\lim_{n\to\infty} P^{(n-1)}\right)\Pi = P^{\infty}\Pi$$

Definíció I.42 A Markov-láncot stabilnak nevezzük abban az esetben, ha létezik határeloszlása.

Part II

Matematikai statisztika

A matematikai statisztika a valószínűségi tér azon elemeivel foglalkozik, ahol a valószínűség nem ismert, esetleg feltételezéseink vannak csupán értékére. Ekkor hívjuk segítségül a statisztikát, melyben a megfigyeléseinkre alapozva állítunk fel becsléseket, melyekkel megpróbáljuk előrevetíteni a kimeneteleket, és megbecsülni a valószínűséget.

Definíció II.1 Az $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ statisztikai megfigyelést *statisztikai mintának* nevezzük, ha X_i-k tejesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók $\forall$ P$\in \mathcal{P}$ esetén, azaz

$$P(X_i < x) = F_p(x) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

és

$$P(X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \ldots, X_{i_k} < x_{i_k}) = \prod_{\alpha=1}^{k} F_p(x_{i_\alpha}) \quad (\forall 2 \leq k \leq n)$$

A mintának egy $T_n = T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ függvénye, vagy statisztikai függvény.

Definíció II.2 A $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika sorozat a $\vartheta \in R$ paraméter *torzítatlan becslése*, ha $E(T_n) = \vartheta$

Definíció II.3 A $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika sorozat a $\vartheta \in R$ paraméter *asszimptotikusan torzítatlan becslése*, ha

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \vartheta$$

A következő definíciókhoz felhasználtuk, az előző fejezetben tárgyalt sztochasztikus és egy valószínűségű konvergenciák definícióit.

Definíció II.4 A $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika sorozat a $\vartheta \in R$ paraméter *konzisztens becslése*, ha T_n sztochasztikusan konvergál ϑ-hoz, vagyis ha $\forall P \in \mathcal{P}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \vartheta| > \varepsilon) = 0$$

ahol P a lehetséges paraméteres eloszlásaink halmaza.

Definíció II.5 A $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika sorozat a $\vartheta \in R$ paraméter *erősen konzisztens becslése*, ha T_n egy valószínűséggel konvergál ϑ-hoz.

Definíció II.6 A $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika sorozat a $\vartheta \in R$ paraméter *négyzetes középben konzisztens becslése*, ha

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n - \vartheta)^2 = 0$$

Tétel II.1 Ha $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztika erősen, vagy négyzetes középben konzisztens, akkor konzisztens.

Tétel II.2 Ha $T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statisztika aszimptotikusan torzítatlan és szórása 0-hoz tart $(n \to \infty)$, akkor konzisztens.

Definíció II.7 A $T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ és $T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ statisztika a $\vartheta \in R$ paraméter két torzítatlan becslése, akkor T_1 *hatásosabb* a T_2-nél, ha $\sigma^2(T_1) \leq \sigma^2(T_2)$ $\forall\vartheta \in R$, és $\exists\vartheta_0 \in R$, hogy $\sigma^2_{\vartheta_0}(T_1) \leq \sigma^2_{\vartheta_0}(T_2)$

Egy T_n statisztikát hatásosnak nevezünk, ha minden T'-nél hatásosabbnak bizonyul.

Vannak speciális statisztikák, melyekre erős szabályok érvényesek, tekintsük most meg ezeket:

Definíció II.8 Az $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ statisztikát, az $X_1, X_2, \dots, X_n$ statisztikai minta *átlag, vagy empirikus közép statisztikájának* nevezzük.

Definíció II.9 Az $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$ statisztikát, az $X_1, X_2, \dots, X_n$ statisztikai minta *empirikus szórásnégyzet statisztikájának* nevezzük.

Definíció II.10 Az $s_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2$ statisztikát, az $X_1, X_2, \dots, X_n$ statisztikai minta *korrigált empirikus szórásnégyzet statisztikájának* nevezzük.

Az empirikus szórásnégyzet statisztika a ϑ szórásnégyzet aszimptotikusan torzítatlan becslése. A korrigált empirikus szórásnégyzet a ϑ szórásnégyzet torzítatlan becslése. A lineáris statisztikák közül az $\overline{x}_n$ a leghatásosabb. Ha két becslés a paraméter hatásos becslései, akkor a két becslés egyezési valószínűsége egy. Ezek azok a tulajdonságok, amelyek hasznossá teszik a becslések használatát.

Chapter 16

Maximum likelihood becslés

A maximum likelihood becslés egy módszert kínál számunkra, melyben egy becsléshez megfelelő statisztikát tudunk választani.

Definíció II.11 Legyen adott az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diszkrét eloszlású statisztikai minta. Legyen

$$L(x, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} P_{\vartheta}(X_i = x_i)$$

a statisztikai minta együttes eloszlása. Ekkor a minta *maximum likelihood becslésén* azt a $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztikát értjük, amire L(x, T_n) maximális.

Definíció II.12 Legyen adott az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ abszolút folytonos eloszlásfüggvényű statisztikai minta. Legyen

$$L(x, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f_{\vartheta}(x_i)$$

a statisztikai minta együttes sűrűségfüggvénye. Ekkor a minta *maximum likelihood becslésén* azt a $T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statisztikát értjük, amire L(x, T_n) maximális.

Az L(x, ϑ) függvényt hívják likelihood függvénynek. A maximális érték meghatározásához deriválást használunk, azonban mivel ezen függvények általában bonyolult kinézetűek, eléggé problémás a deriválásuk. Felhasználjuk azt, hogy a természetes alapú logaritmus szigorúan monoton növekvő függvény, így maximumhelyei ugyanott lépnek fel, mint a likelihood függvénynél. Ennek okán sokszor egyszerűbb az úgynevezett log-likelihood függvényre megoldani a maximumkeresés feladatát. A log-likelihood függvény a likelihood függvény természetes alapú logaritmusa, vagyis $l(x, \vartheta) = lnL(x, \vartheta)$, amiből

$$l(x, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} ln(f_{\vartheta}(x_i))$$

A megoldásokat a loglikelihood függvény ϑ_i paraméter szerinti parciális deriváltjainak azok k értékeinél kell vizsgálnunk, ahol a derivált 0. Az átlagstatisztika és az empirikus szórásnégyzet statisztika normál esetben az elméleti várható érték és szórásnégyzet maximum likelihood becslései. Poisson eloszlású statisztikai minta esetén az átlagstatisztika a a várható érték maximum likelihood becslése, míg egyenletes eloszlásnál, a maximumstatisztikáról látható be ugyanez. A hatásos becslés, ha létezik ilyen, egy statisztikai minta esetében, a maximum likelihood becslés.

Chapter 17

Hipotézisvizsgálat

17.1 Konfidencia-intervallumok

Az eddigi esetekben az úgynevezett pontbecslésekről volt szó, ahol pontosan próbáltuk meghatározni a paramétert. Folytonos esetben annak a valószínűsége, hogy egy valószínűségi változó éppen egy megadott pontot vegyen fel, nulla (lásd visszább...), így ezekben az intervallumbecslések használata vezet eredményre, ahol a mintákból tartományokat határozunk meg, meyekbe a paraméter nagy valószínűséggel beleesik.

Definíció II.13 Legyen $X_1, \ldots X_n \in N(0,1)$ teljesen független valószínűségi változók, ekkor az $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ valószínűségi változó eloszlása *n-szabadságfokú* χ^2 *eloszlás.*

Definíció II.14 Legyen $X_1, X_2 \ldots X_n \in N(0,1), Y \in N(0,1)$ függetlenek, ekkor a Z = $\frac{Y}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}}$ eloszlása *n-szabadságfokú t vagy Student eloszlás.*

Tétel II.3 Az $X_1, X_2, \ldots X_n \in$ N(m,D)-ből álló statisztikai minta esetén *Lukács tétele* a következőket mondja:

- $\overline{x}_n \in N(m, \frac{D}{\sqrt{n}})$
- $\frac{ns_n^2}{D^2} \in \chi^2_{n-1}$,n-1 szabadságfokú χ^2 eloszlású.
- $\overline{x}_n$ és s_n^2 függetlenek, illetve $\overline{x}_n$ és s_n^{*2} is függetlenek.

17.2 Hipotézisek, próbák

Vegyünk a $\mathcal{P}$ valószínűségi mértékek osztályát. Legyen ez felbontható $\mathcal{P}0$ és $\mathcal{P}1$ diszjunkt részhalmazokra. Állítsunk fel egy véletlen eseményhez tartozó P valószínűségi mértékre egy H_0 nullhipotézist, és egy H_1 alternatív hipotézist, annak értelmében, hogy a P a $\mathcal{P}0$ vagy $\mathcal{P}1$ halmaz eleme. A döntést, hogy P melyikhez tartozik a statisztikai minta alapján hozzuk. Készítünk egy próbastatisztikát, ami hogyha teljesül, akkor H_0-át fogadjuk el, ellenkező esetben H_1-et. Elsőfajú hibát követünk el, ha helyes nullhipotézist elvetjünk, és másodfajút, ha a helytelent elfogadjuk.

A következőkben különböző próbákat fogunk vizsgálni, melyekben a nullhipotézis elfogadásának eldöntésére előre definiált próbastatisztikák állnak rendelkezésünkre.

17.2.1 Paraméteres próbák

- Egymintás u próba:
  Legyen egy m és D paraméterű normális eloszlásból vett mintánk. D értéke ismert, m-é nem. A nullhipotézis ebben az esetben, hogy az eloszlás várható értéke éppen m, jelben

  $$H_0 : EX = m$$

  $$H_1 : EX \neq m$$

  Próbastatisztikánk az

  $$\left| \frac{\overline{x}_n - m}{D} \sqrt{n} \right|$$

  Ha ennek értéke kisebb mint u_ε (ahol $\Phi(u_\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$) akkor H_0-t elfogadjuk, máskülönben elvetjük.

- Kétmintás u próba:
  Legyenek m_1 és D_1 valamint m_2 és D_2 paraméterű normális eloszlásból vett mintánk. D-k ismertek, m-ek nem. A nullhipotézis ebben az esetben, hogy a két eloszlás várható értéke megegyezik, jelben

  $$H_0 : m_1 = m_2$$

  $$H_1 : m_1 \neq m_2$$

  Próbastatisztikánk az

  $$\left| \frac{\overline{x}_n - \overline{y}_k}{\sqrt{\frac{D_1^2}{n} + \frac{D_2^2}{k}}} \right|$$

  Ha ennek értéke kisebb mint u_ε (ahol $\Phi(u_\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$) akkor H_0-t elfogadjuk, máskülönben elvetjük.

- Egymintás t próba:
  Legyen egy m és D paraméterű normális eloszlásból vett mintánk. D és m értéke is ismeretlen nem. A nullhipotézis ebben az esetben, hogy a eloszlás várható értéke éppen m, jelben

  $$H_0 : EX = m$$

$$H_1 : EX \neq m$$

Próbastatisztikánk az

$$\frac{\overline{x}_n - m}{s_n^{*2}} \sqrt{n} \in t_{n-1}$$

Ha ennek abszolút értéke kisebb mint t_ε (ahol t_ε-t a Student-eloszlás táblázatából tudjuk kiolvasni) akkor H_0-t elfogadjuk, máskülönben elvetjük.

- Kétmintás t próba:
  Legyenek m_1 és D valamint m_2 és D paraméterű normális eloszlásból vett mintánk. A közös D és m sem nem. A nullhipotézis ebben az esetben, hogy a két eloszlás várható értéke megegyezik, jelben

  $$H_0 : m_1 = m_2$$

  $$H_1 : m_1 \neq m_2$$

  Próbastatisztikánk az

  $$\frac{\frac{\overline{x}_n - \overline{y}_k}{D\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{k}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)s_{x,n}^{*2}}{D^2} + \frac{(k-1)s_{y,k}^{*2}}{D^2}}} = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_k}{\sqrt{(n-1)s_{x,n}^{*2} + (k-1)s_{y,k}^{*2}}} \in t_{n+k-2}$$

  Ha ennek abszolút értéke kisebb mint t_ε (ahol t_ε-t az n+k-2 szabadságfokú Student táblázatból tudjuk kiolvasni, az 1-k-hoz tartozó érték.) akkor H_0-t elfogadjuk, máskülönben elvetjük.

- F próba:
  Legyen adott két mintánk, m_1, D_1, illetve m_2, D_2 paraméterű normális eloszlásból. Egyik érték sem ismert. A nullhipotézis ebben az esetben, hogy a két eloszlás szórása megegyezik, jelben

  $$H_0 : D_1 = D_2$$

  $$H_1 : D_1 \neq D_2$$

  Próbastatisztikánk az

  $$\frac{s_{x,n}^{*2}}{s_{y,k}^{*2}}$$

  Ha ennek értéke K_1 és K_2 közé esik, ahol a két értéket az n-1, k-1 szabadságfokú Fisher táblából kapjuk, akkor elfogadjuk H_0-át, egyébként elvetjük.

  Mind az 5 próbastatisztika elsőfajú hibavalószínűsége ε-nal egyenlő.