

Együttes eloszlás, függetlenség, kovariancia, regressziók

1. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

	X	-1	0	1
Y				
	-1	p	$3p$	$6p$
	1	$5p$	$15p$	$30p$

Mekkora a p paraméter értéke? Függetlenek-e X és Y ?

- Feldobunk két kockát. X a hatosok száma, Y a dobott értékek közül a kisebbik. Adja meg X és Y együttes eloszlásának táblázatát és a peremeloszlásokat! Függetlenek X és Y ?
- Két kockával dobunk. X az egyesek száma, Y a dobott összeg. $\text{cov}(X, Y) = ?$
- Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyacsomagból kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Számolja ki X és Y kovarianciáját!
- Tekintsük a 90/5 lottóhúzást! Jelölje X a 45-nél kisebb, Y pedig a hárommal osztható számok számát a kihúzottak között! Számolja ki a $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$ -t!
- Két kockával dobunk. X a dobott értékek maximuma, Y pedig a minimuma. Adja meg a $\text{cov}(X, 2Y + 1)$ -et!
- Háromszor dobunk egy szabályos kockával. X a legkisebb, Y a legnagyobb érték. Adja meg az $\mathbf{E}(X | Y = 3)$ feltételes várható értéket!
- Legyen X exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel és Y normális eloszlású $m = 2$ és $\sigma = 1$ paraméterrel. X és Y független valószínűségi változók. Adja meg X és Y együttes sűrűségfüggvényét! Számolja ki a $Z = 3X - 2Y$ valószínűségi változó várható értékét és szórását!
- Egy felhasználónak két szerveren is van e-mail címe. Az egyikre naponta X a másikra Y üzenet érkezik egymástól függetlenül, ahol $X \in Po(3)$ és $Y \in Po(6)$. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy nap legfeljebb két üzenet érkezik összesen?
- Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + y + xy), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} .$$

Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Függetlenek-e X és Y ?

11. Az X, Y pár együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & , \text{ ha } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{ egyébként} \end{cases} .$$

Számolja ki a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y ?

12. Legyen $X \in U(0, 2)$, azaz a $(0, 2)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \cos X$ és $Z = \sin X$. Határozzuk meg $\text{cov}(Y, Z)$ -t! Függetlenek-e Y és Z ?
13. Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x, y) = \frac{4}{5}(x + y + xy)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. (Különben $f_{X,Y}(x, y) = 0$.) Adja meg az $\mathbf{E}(Y | X)$ regressziót.
14. Legyen $X \in N(-4, 2)$, $Y = 3X + 1$, $Z = X^2 - 1$. Számolja ki $\text{cov}(Y, Z)$ -t!