Többváltozós stabil Euler-polinomok

Visontai Mirkó

2011. február 8.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & \\ \iddots & & \iddots & & \vdots & & \ddots & & \ddots \end{array}$$

A fenti Euler-háromszögben szereplő számok (az ún. Euler-számok, jel.: $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, $0 \le k \le n-1$; pl. $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$) talán kevésbé ismertek, mint a Pascal-háromszöget alkotó társaik, ugyanakkor sok érdekes azonosság kötődik nevükhöz. Az alábbi Worpitzky-azonosság szemlélteti szoros kapcsolatukat például a binomiális együtthatókkal,

$$x^n = \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{x+m}{n},$$

a következő pedig a másodfajú Stirling-számokkal (jel.: $\left\{ {n \atop k} \right\}$):

$$A_n(x) := \sum_{m=0}^{n-1} \left\langle {n \atop m} \right\rangle x^m = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} k!(x-1)^{n-k}\,.$$

Ezen felül számos permutációkkal kapcsolatos leszámlálási feladatban játszanak központi szerepet. Többfajta lehetséges értelmezésük közül a következő kiemelt fontosságú lesz számunkra: $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ – az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz azon σ permutációinak száma, melyek pontosan k „emelkedőt” $(i : \sigma_i < \sigma_{i+1})$ tartalmaznak.

Ebben az előadásban azt az ismert tételt fogjuk körüljárni, illetve nagy mértékben általánosítani, miszerint az $A_n(x)$ Euler-polinomnak — az előbb említett Euler-féle számok generátorfüggvényének — csak valós gyöke van. A módszerünk a többváltozós *stabil* polinomok nemrég továbbfejlesztett elméletére épül. A végső általánosítás speciális eseteként magában foglalja, többek között, Bóna Miklós, Petter Brändén, Svante Janson eredményeit.

A bemutatott eredmények konzulensemmel, Jim Haglunddal folytatott közös munkából születtek.