Hamilton-láncok hipergráfokban

Katona Gyula Y.

BME SZIT

2008. március 4.

Tartalom

Tartalom

Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

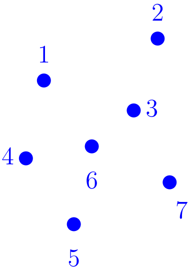
Gráf

Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf



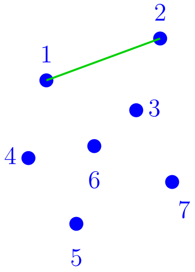
Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1, 2\}$



Mi egy hipergráf?

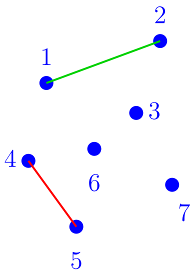
Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1, 2\}$

$\{4, 5\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

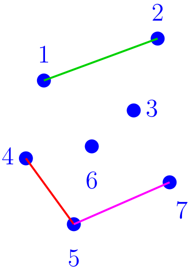
Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

$\{5,7\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

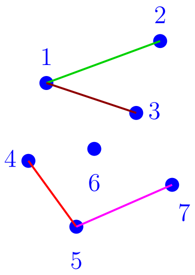
Gráf

$\{1, 2\}$

$\{4, 5\}$

$\{5, 7\}$

$\{1, 3\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

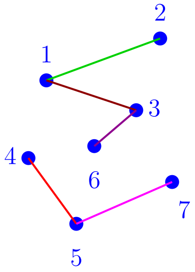
$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

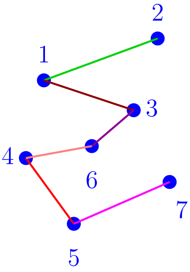
$\{4,5\}$

$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1, 2\}$

$\{4, 5\}$

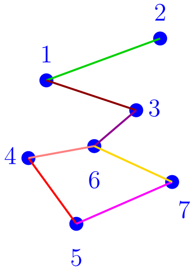
$\{5, 7\}$

$\{1, 3\}$

$\{3, 6\}$

$\{4, 6\}$

$\{6, 7\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

3-uniform hipergráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

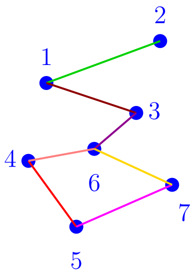
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

$\{6,7\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

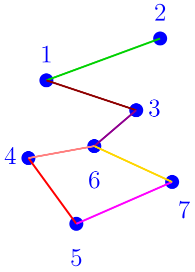
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

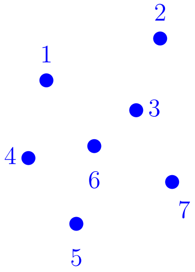
$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

$\{6,7\}$



3-uniform hipergráf



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

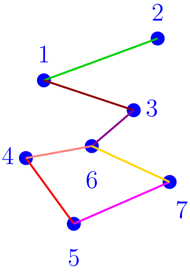
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

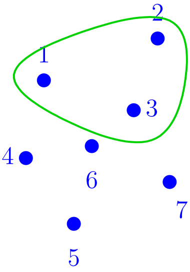
$\{4,6\}$

$\{6,7\}$



3-uniform hipergráf

$\{1,2,3\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

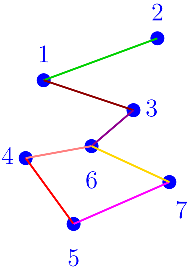
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

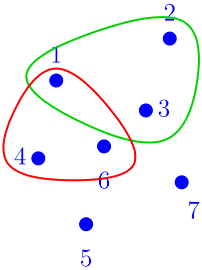
$\{6,7\}$



3-uniform hipergráf

$\{1,2,3\}$

$\{1,4,6\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

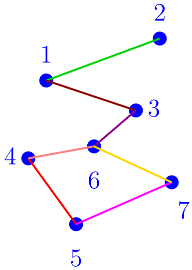
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

$\{6,7\}$

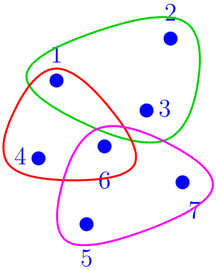


3-uniform hipergráf

$\{1,2,3\}$

$\{1,4,6\}$

$\{5,6,7\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

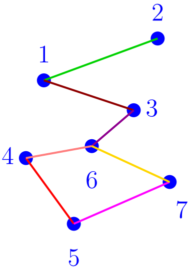
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

$\{6,7\}$



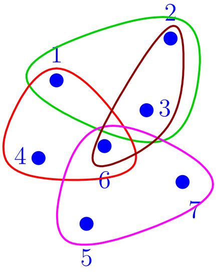
3-uniform hipergráf

$\{1,2,3\}$

$\{1,4,6\}$

$\{5,6,7\}$

$\{2,3,6\}$



Mi egy hipergráf?

Definíció

Egy r-uniform hipergráf egy $(V, \mathcal{E})$ pár, ahol V a pontok halmaza, és $\mathcal{E}$ a V ponthalmaz r-elemű részhalmazainak egy halmaza, amiket hiperéleknek hívunk.

Gráf

$\{1,2\}$

$\{4,5\}$

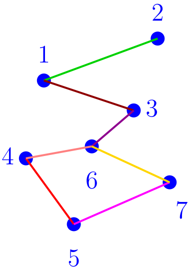
$\{5,7\}$

$\{1,3\}$

$\{3,6\}$

$\{4,6\}$

$\{6,7\}$



3-uniform hipergráf

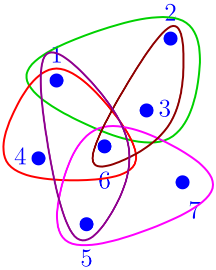
$\{1,2,3\}$

$\{1,4,6\}$

$\{5,6,7\}$

$\{2,3,6\}$

$\{1,5,6\}$

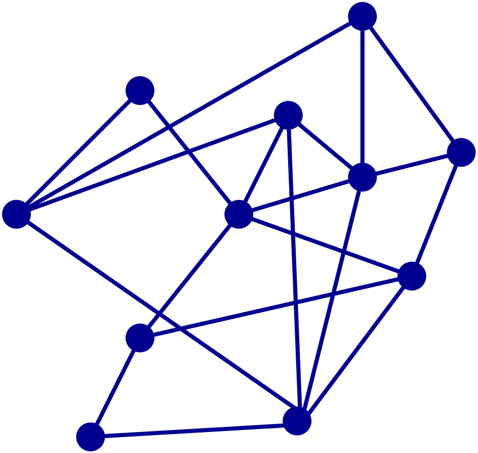


Hamiltonian-lánc

A Hamilton kör egy gráfban a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos pár egy élet alkot.

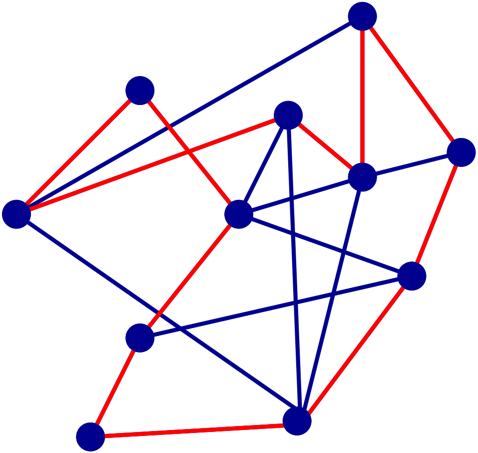
Hamiltonian-lánc

A Hamilton kör egy gráfban a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos pár egy élet alkot.



Hamiltonian-lánc

A Hamilton kör egy gráfban a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos pár egy élet alkot.



Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.

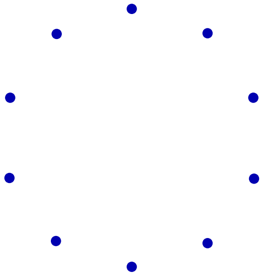
$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A **Hamilton-lánc** *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

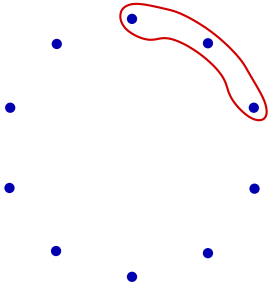


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

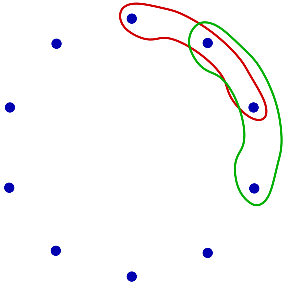


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A ***Hamilton-lánc*** *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

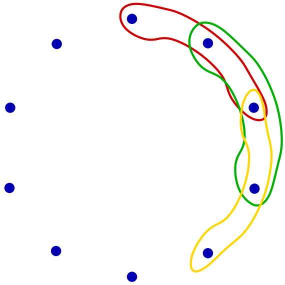


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

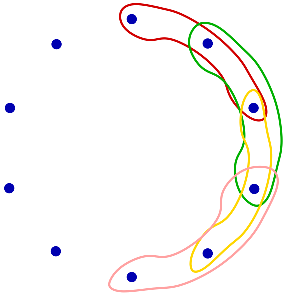


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

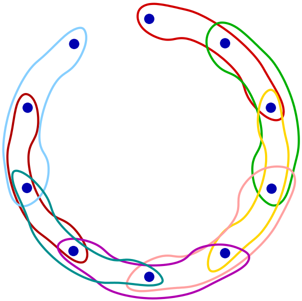


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

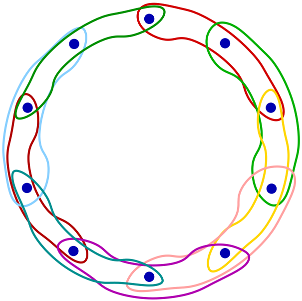


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör

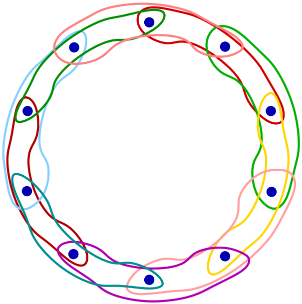


Hamilton-lánc

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf. A Hamilton-lánc *a pontok egy ciklikus permutációja, hogy minden szomszédos r-es egy élet alkot.*

$r = 2 \implies$ Hamilton-lánc = Hamilton-kör



Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló ***rögzített m-es fokszáma*** *azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét.*

Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló ***rögzített m-es fokszáma*** *azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét. Jelölése:* $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. $\delta_r^{(m)}(\mathcal{H})$ *jelöli a minimimális $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ értéket az összes m-es között $\mathcal{H}$-ban.*

Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló rögzített m-es fokszáma azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét. Jelölése: $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. $\delta_r^{(m)}(\mathcal{H})$ jelöli a minimimális $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ értéket az összes m-es között $\mathcal{H}$-ban. Egy m-es szomszédsága:

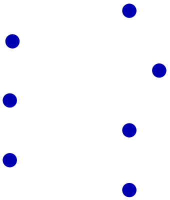
$$N_{\mathcal{H}}(v_1, v_2, \ldots, v_m) := \{E - \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \mid v_i \in E, E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}.$$

Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló ***rögzített m-es fokszáma*** *azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét. Jelölése:* $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. $\delta_r^{(m)}(\mathcal{H})$ *jelöli a minimimális $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ értéket az összes m-es között $\mathcal{H}$-ban. Egy m-es* ***szomszédsága****:*

$$N_{\mathcal{H}}(v_1, v_2, \ldots, v_m) := \{E - \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \mid v_i \in E, E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}.$$

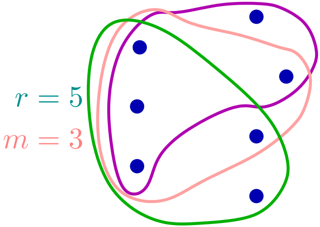


Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló ***rögzített m-es fokszáma*** *azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét. Jelölése:* $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. $\delta_r^{(m)}(\mathcal{H})$ *jelöli a minimimális $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ értéket az összes m-es között $\mathcal{H}$-ban. Egy m-es* ***szomszédsága****:*

$$N_{\mathcal{H}}(v_1, v_2, \ldots, v_m) := \{E - \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \mid v_i \in E, E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}.$$

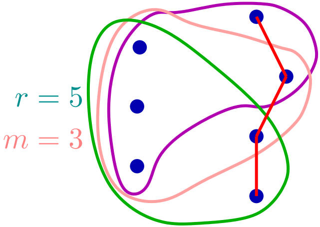


Fokszám

Definíció

Egy r-uniform hipergráfban a különböző $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, pontokból álló rögzített m-es fokszáma azoknak az éleknek a száma, amelyek tartalamazzák a $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ pontok mindegyikét. Jelölése: $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. $\delta_r^{(m)}(\mathcal{H})$ jelöli a minimimális $d_r(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ értéket az összes m-es között $\mathcal{H}$-ban. Egy m-es szomszédsága:

$$N_{\mathcal{H}}(v_1, v_2, \ldots, v_m) := \{E - \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \mid v_i \in E, E \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}.$$



Tartalom

Tétel (Dirac)

Ha egy gráfban $\delta_1^{(2)} \geq n/2$ *akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.*

Hipergráfos eredmény

Tétel (Katona, Kierstead; 2000)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf* n *ponton és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$, *akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz Hamilton-láncot.*

Hipergráfos eredmény

Tétel (Katona, Kierstead; 2000)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf* n *ponton és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$*, akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz Hamilton-láncot.*

A bizonyítás vázlata.

Hipergráfos eredmény

Tétel (Katona, Kierstead; 2000)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf* n *ponton és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$*, akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz Hamilton-láncot.*

A bizonyítás vázlata.

Tétel (Ruciński, Rödl, Szemerédi; 2006)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf, ahol* n *elég nagy és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{2}n$*, akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz a Hamilton-láncot.*

Hipergráfos eredmény

Tétel (Katona, Kierstead; 2000)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf* n *ponton és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$*, akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz Hamilton-láncot.*

A bizonyítás vázlata.

Tétel (Ruciński, Rödl, Szemerédi; 2006)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ *egy* r*-uniform hipergráf, ahol* n *elég nagy és* $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{2}n$*, akkor* $\mathcal{H}$ *tartalmaz a Hamilton-láncot.*

Igaz-e ez „normális méretű” hipergráfokra?

Hipergráfos eredmény

Tétel (Katona, Kierstead; 2000)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy r-uniform hipergráf n ponton és $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) > (1 - \frac{1}{2r})n + 4 - r - \frac{5}{2r}$, akkor $\mathcal{H}$ tartalmaz Hamilton-láncot.

A bizonyítás vázlata.

Tétel (Ruciński, Rödl, Szemerédi; 2006)

Ha $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy r-uniform hipergráf, ahol n elég nagy és $\delta_{r-1}(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{2}n$, akkor $\mathcal{H}$ tartalmaz a Hamilton-láncot.

Igaz-e ez „normális méretű” hipergráfokra?
Ore típusú tétel?

Tartalom

Definíció

Egy hipergráf k-él-Hamilton ha akármelyik k élének elhagyásával marad a hipergáfban Hamilton-lánc.

Definíció

Egy hipergráf k*-él-Hamilton ha akármelyik* k *élének elhagyásával marad a hipergáfban Hamilton-lánc.*

Kérdés

Mennyi az élek minimális száma egy n *pontú,* k*-él-Hamilton,* r*-uniform hipergráfban?*

Definíció

Egy hipergráf k-él-Hamilton ha akármelyik k élének elhagyásával marad a hipergáfban Hamilton-lánc.

Kérdés

Mennyi az élek minimális száma egy n pontú, k-él-Hamilton, r-uniform hipergráfban?

r=2 esetén $\Longrightarrow$

Tétel (Paoli, Wong, Wong; 1984)

Egy $n \geq k+3$ pontú, k-él-Hamilton gráfban az élek minimális száma $\lceil n(k+2)/2 \rceil$.

Triviális alsó becslés

Megfigyelés

Ha $\mathcal{H}$ egy k-él-Hamilton, r-uniform hipergráf, akkor $\delta_1^{(r)} \geq k + r$.

Triviális alsó becslés

Megfigyelés

Ha $\mathcal{H}$ egy k-él-Hamilton, r-uniform hipergráf, akkor $\delta_1^{(r)} \geq k + r$.

Bizonyítás.

Egy r-uniform Hamilton-lánc minden pontja pontosan r élben van benne. Így kell legalább r él azután is, hogy kitöröltünk k élet.

Triviális alsó becslés

Megfigyelés

Ha $\mathcal{H}$ egy k-él-Hamilton, r-uniform hipergráf, akkor $\delta_1^{(r)} \geq k + r$.

Bizonyítás.

Egy r-uniform Hamilton-lánc minden pontja pontosan r élben van benne. Így kell legalább r él azután is, hogy kitöröltünk k élet. $\square$

Ez éles $r = 2$ esetén, de nem éles, ha $r > 2$.

Új eredmény $r = 3, k = 1$ esetén

Tétel (Frankl, Katona; 2008)

Van olyan n pontú 1-él-Hamilton 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf amire

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{11}{6}n + o(n) \approx 1.83n.$$

Új eredmény $r = 3, k = 1$ esetén

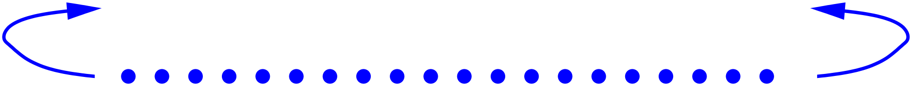
Tétel (Frankl, Katona; 2008)

Van olyan n pontú 1-él-Hamilton 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf amire

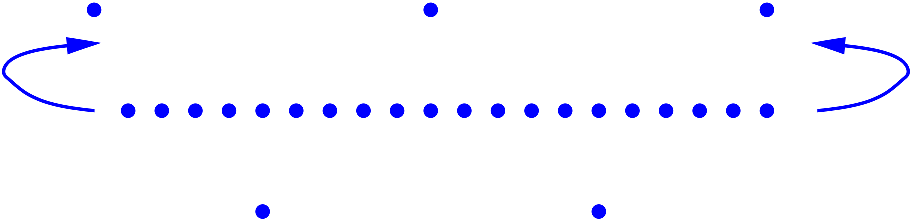
$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{11}{6}n + o(n) \approx 1.83n.$$

Triviális becslés: 2 éldiszjunkt Hamilton-lánc $\Longrightarrow 2n$ él

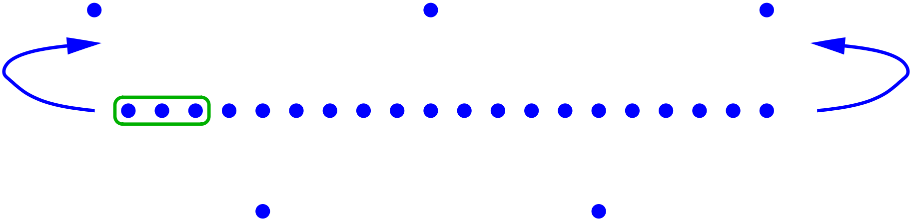
A mi konstrukciónk



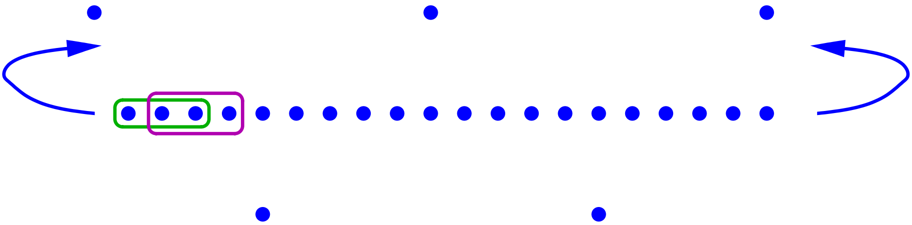
A mi konstrukciónk



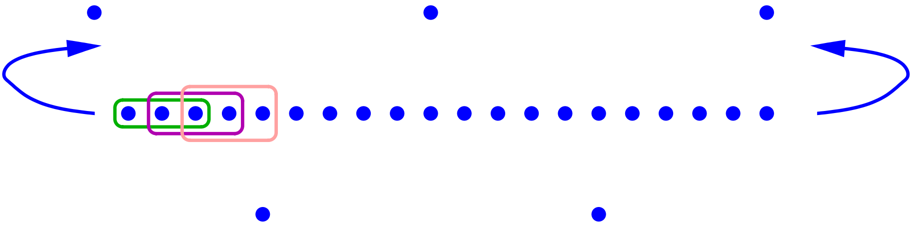
A mi konstrukciónk



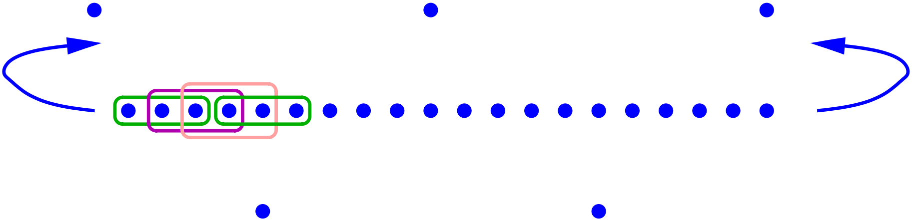
A mi konstrukciónk



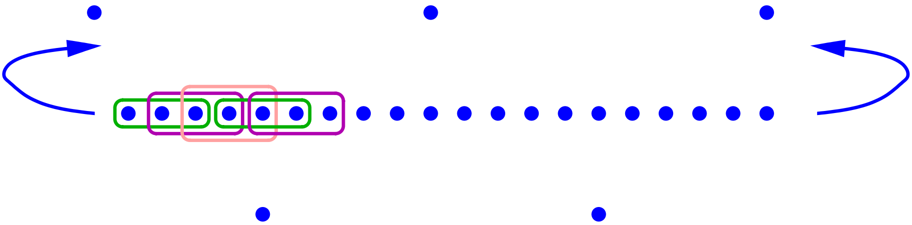
A mi konstrukciónk



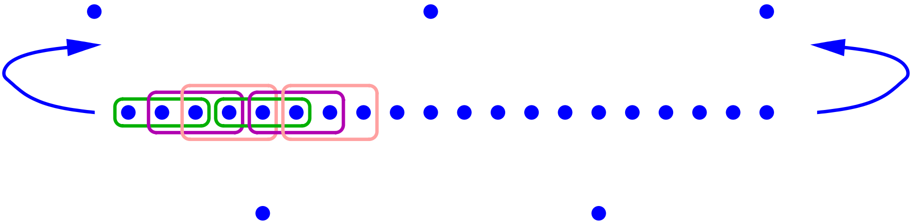
A mi konstrukciónk



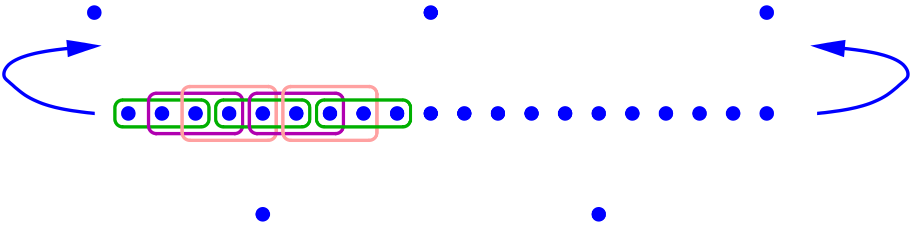
A mi konstrukciónk



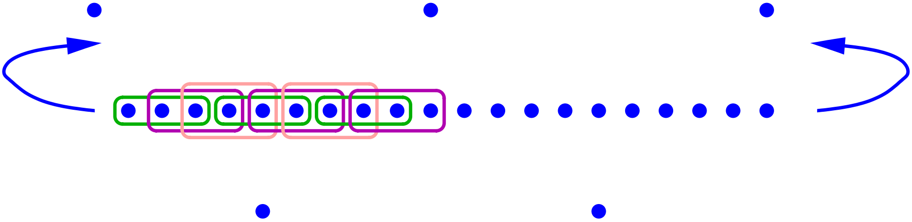
A mi konstrukciónk



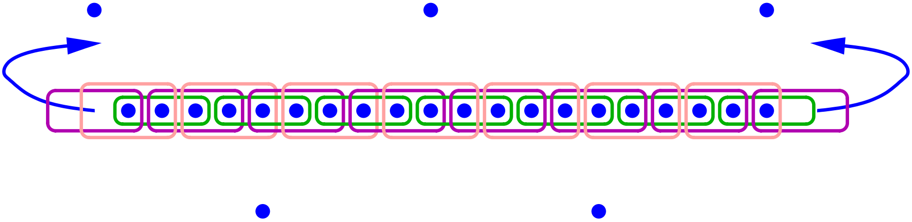
A mi konstrukciónk



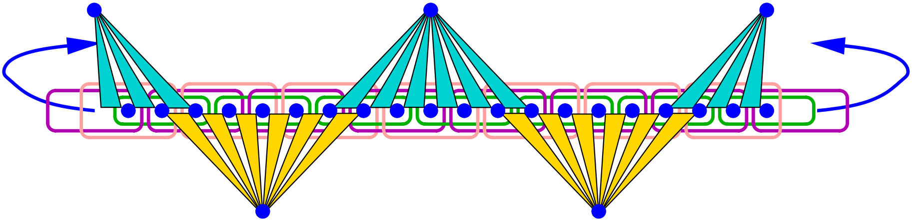
A mi konstrukciónk



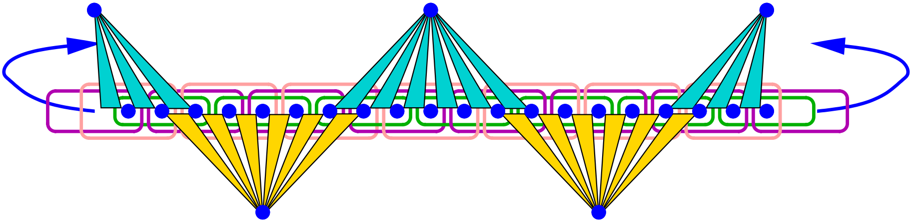
A mi konstrukciónk



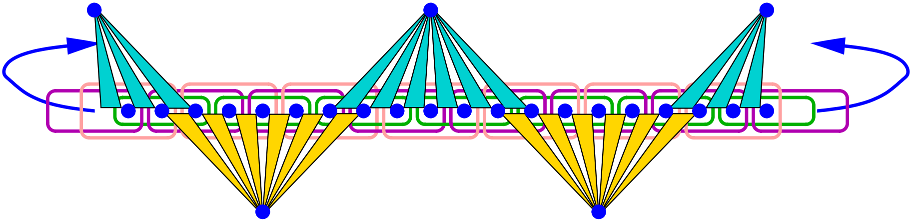
A mi konstrukciónk



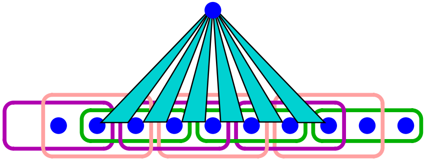
A mi konstrukciónk



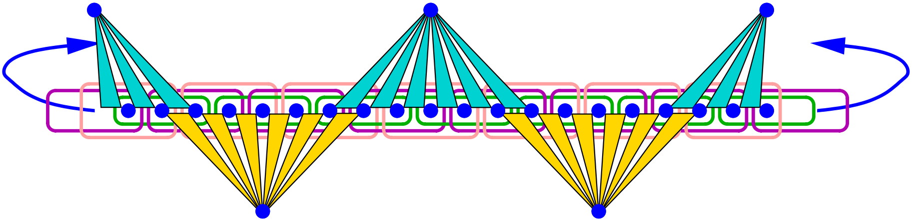
A mi konstrukciónk



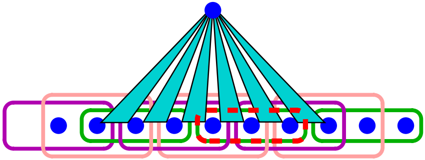
Miért 1-él-Hamilton ez?



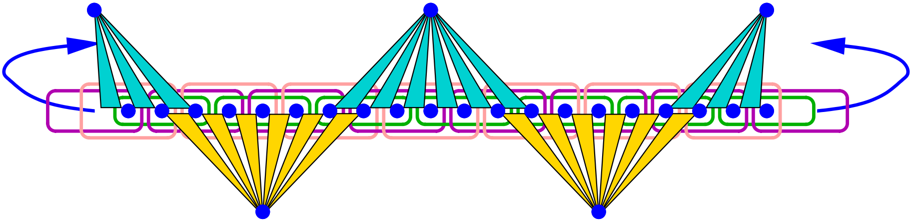
A mi konstrukciónk



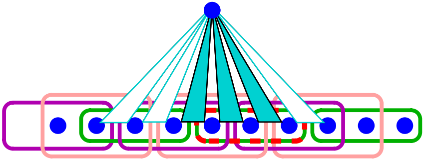
Miért 1-él-Hamilton ez?



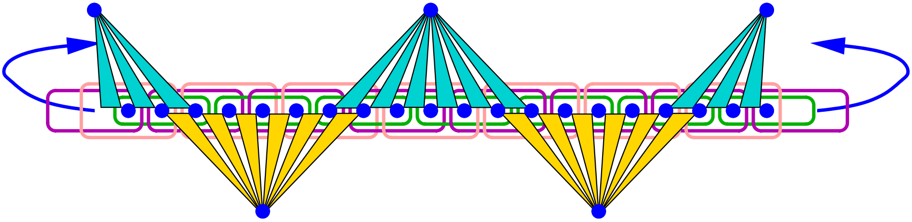
A mi konstrukciónk



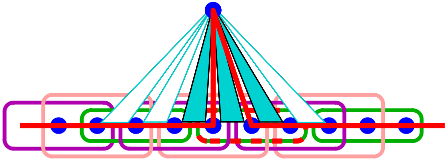
Miért 1-él-Hamilton ez?



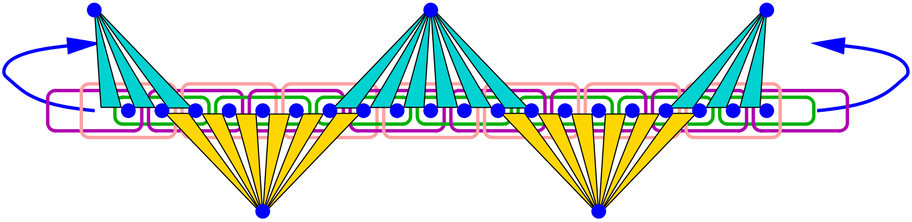
A mi konstrukciónk



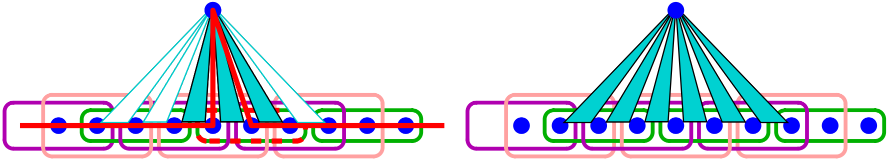
Miért 1-él-Hamilton ez?



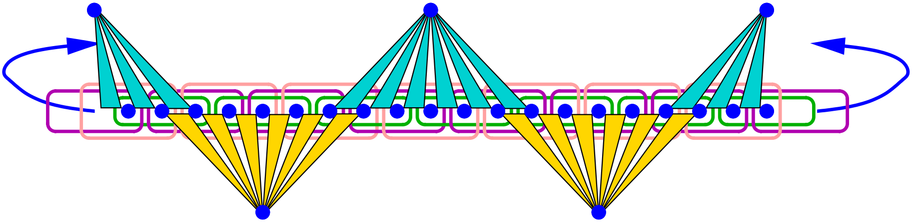
A mi konstrukciónk



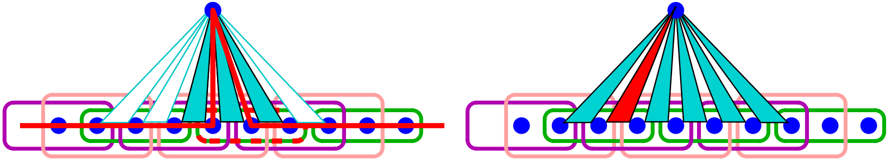
Miért 1-él-Hamilton ez?



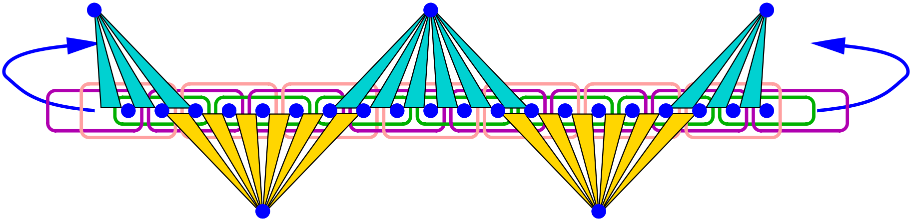
A mi konstrukciónk



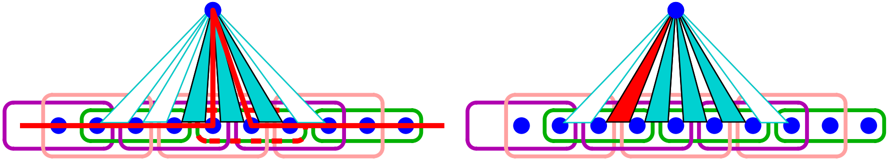
Miért 1-él-Hamilton ez?



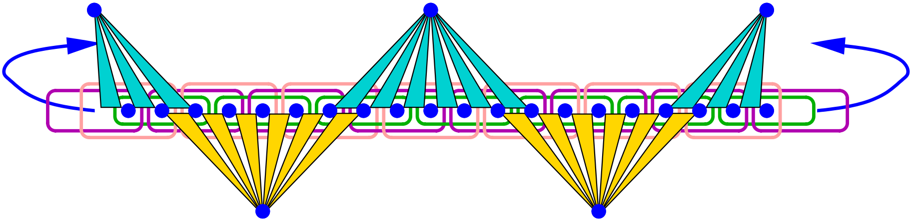
A mi konstrukciónk



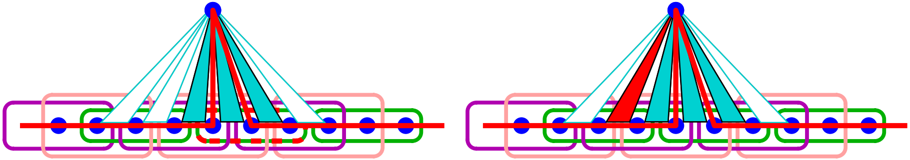
Miért 1-él-Hamilton ez?



A mi konstrukciónk



Miért 1-él-Hamilton ez?



Lower bound

Megfigyelés (Triviális becslés)

Minden $n \geq 5$ pontú, 1-él-Hamilton, 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{4}{3}n \approx 1.33n$$

Bizonyítás.

Minden pontnak benne kell lennie legalább 4 élben .

Lower bound

Megfigyelés (Triviális becslés)

Minden $n \geq 5$ pontú, 1-él-Hamilton, 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{4}{3}n \approx 1.33n$$

Bizonyítás.

Minden pontnak benne kell lennie legalább 4 élben . $\square$

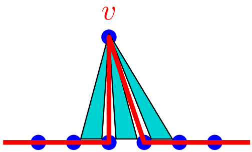
Tétel (Frankl, Katona; 2008)

Minden $n \geq 5$ pontú, 1-él-Hamilton, 3-uniform$\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{14}{9}n \approx 1.55n.$$

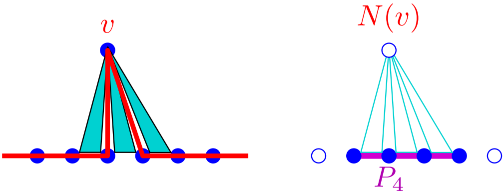
A bizonyítás fő ötlete

Ha egy v pont benne van a Hamilton-láncban,
akkor $N(v)$ tartalmaz egy P_4-et.



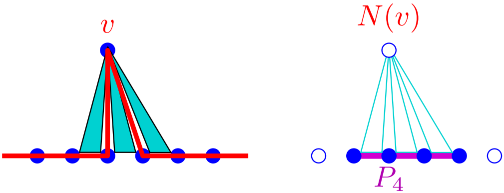
A bizonyítás fő ötlete

Ha egy v pont benne van a Hamilton-láncban,
akkor $N(v)$ tartalmaz egy P_4-et.



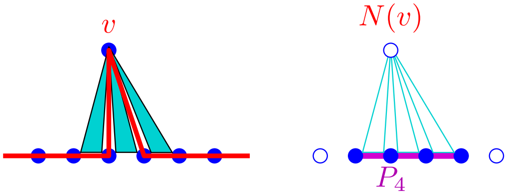
A bizonyítás fő ötlete

Ha egy v pont benne van a Hamilton-láncban, akkor $N(v)$ tartalmaz egy P_4-et.



A bizonyítás fő ötlete

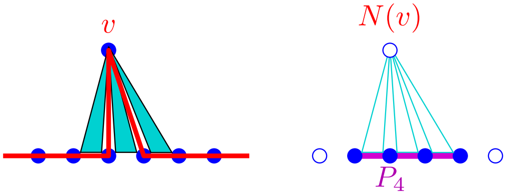
Ha egy v pont benne van a Hamilton-láncban, akkor $N(v)$ tartalmaz egy P_4-et.



Ha a hipergráf 1-él-Hamilton akkor $N(v)$ rendelkezik következő tulajdonsággal minden v-re:

A bizonyítás fő ötlete

Ha egy v pont benne van a Hamilton-láncban,
akkor $N(v)$ tartalmaz egy P_4-et.



Ha a hipergráf 1-él-Hamilton akkor $N(v)$ rendelkezik következő tulajdonsággal minden v-re:

Definíció

Egy gráf *k-stabil**, ha bármely k élét elhagyva még tartalmaz P_4-et.*

Minimális méretű k-stabil gráfok

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil gráfnak? (függetlenül a pontok számától)

Minimális méretű k-stabil gráfok

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil gráfnak? (függetlenül a pontok számától)

$k = 1$ esetén 4 és az extremális gráf a C_4.

Minimális méretű k-stabil gráfok

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil gráfnak? (függetlenül a pontok számától)

$k = 1$ esetén 4 és az extremális gráf a C_4.
De ez csak a triviális becslést adja.

Minimális méretű k-stabil gráfok

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil gráfnak? (függetlenül a pontok számától)

$k = 1$ esetén 4 és az extremális gráf a C_4.
De ez csak a triviális becslést adja.
Megmutathatjuk, hogy nem lehet minden pont szomszédsága épp egy C_4.

Minimális méretű k-stabil gráfok

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil gráfnak? (függetlenül a pontok számától)

$k = 1$ esetén 4 és az extremális gráf a C_4.
De ez csak a triviális becslést adja.
Megmutathatjuk, hogy nem lehet minden pont szomszédsága épp egy C_4.

Tétel (Horváth, Katona)

Jelölje $S(k)$ egy k-stabil gráf éleinek minimális számát. Ha $k \geq 2$ akkor

$$S(k) = \left\lceil k + \sqrt{2k + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil .$$

MŰEGYETEM 1782

Általános alsó becslés

Következmény (Frankl, Horváth, Katona)

Minden n pontú, k-él-Hamilton, 3-uniform hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{\left\lceil k + \sqrt{2k + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil}{3} n > \left\lceil \frac{(k+2)n}{3} \right\rceil .$$

Általános alsó becslés

Következmény (Frankl, Horváth, Katona)

Minden n pontú, k-él-Hamilton, 3-uniform hipergráfra teljesül, hogy

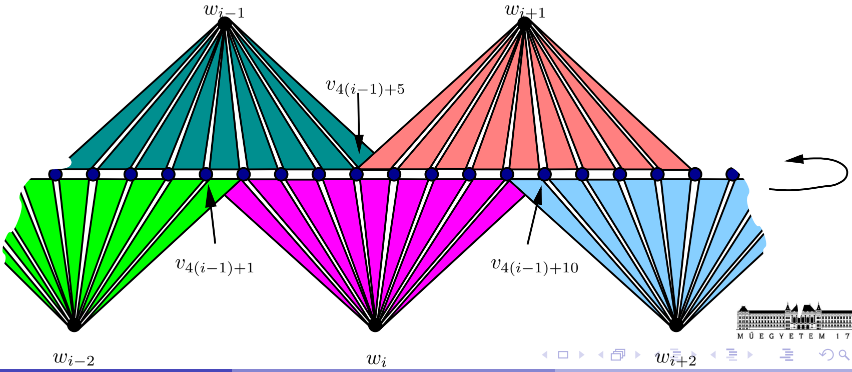
$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{\left\lceil k + \sqrt{2k + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil}{3} n > \left\lceil \frac{(k+2)n}{3} \right\rceil .$$

További eredmények

Tétel

Van olyan n pontú, 2-él-Hamilton, 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, melyre

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{13}{4}n + o(n).$$

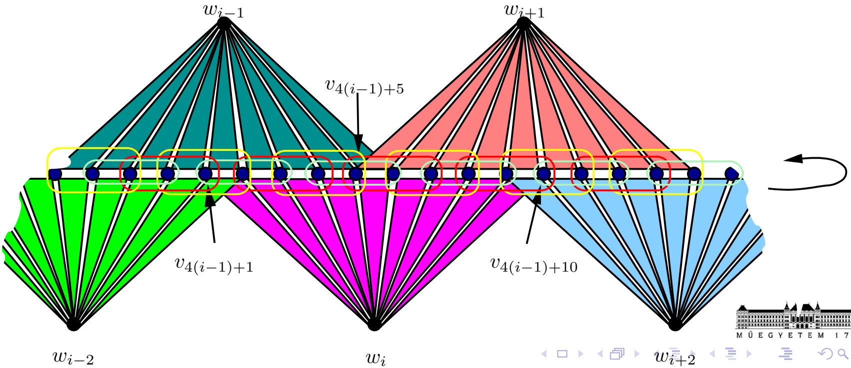


További eredmények

Tétel

Van olyan n pontú, 2-él-Hamilton, 3-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf, melyre

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{13}{4}n + o(n).$$



További eredmények

Tétel

Van olyan n pontú, 1-él-Hamilton, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{4r-1}{2r}n + o(n).$$

További eredmények

Tétel

Van olyan n pontú, 1-él-Hamilton, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{4r-1}{2r}n + o(n).$$

Tétel

Minden $n \geq 6$ pontú, 1-él-Hamilton, 4-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{3}{2}n.$$

További eredmények

Tétel

Van olyan n pontú, 1-él-Hamilton, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| = \frac{4r-1}{2r}n + o(n).$$

Tétel

Minden $n \geq 6$ pontú, 1-él-Hamilton, 4-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül, hogy

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{3}{2}n.$$

Kérdés

Legalább hány éle van egy k-stabil, r-uniform hipergráfnak?

Tartalom

Kérdés

Legfeljebb hány éle van egy n pontú, r-uniform hipergráfnak, amiben nincs Hamilton-lánc?

Kérdés

Legfeljebb hány éle van egy n pontú, r-uniform hipergráfnak, amiben nincs Hamilton-lánc?

Gráfokra: $\binom{n-1}{2} + 1$

Új eredmény

Tétel (Frankl, Katona; 2008)

Ha egy n pontú, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfban nincs Hamilton-lánc, akkor

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \leq \left(1 - \frac{4r}{(4r-1)n}\right)\binom{n}{r} = \frac{1}{r!}\left(n^r - \left[\binom{r}{2} + \frac{12}{11}\right] n^{r-1} + o(n^{r-1})\right)$$

Új eredmény

Tétel (Frankl, Katona; 2008)

Ha egy n pontú, r-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfban nincs Hamilton-lánc, akkor

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \leq \left(1 - \frac{4r}{(4r-1)n}\right)\binom{n}{r} = \frac{1}{r!}\left(n^r - \left[\binom{r}{2} + \frac{12}{11}\right] n^{r-1} + o(n^{r-1})\right)$$

Tétel (Tuza; 2007)

Minden $n > r$ esetén van olyan r-uniform hipergráf n ponton, hogy az élek száma legalább

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-2} + o(n) = \frac{1}{r!}\left(n^r - 2\binom{r}{2} n^{r-1} + o(n^{r-1})\right).$$

MŰEGYETEM 1782

Tartalom

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Hamilton-lánc telített hipergráfok hasonlóan definiálhatók.

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Hamilton-lánc telített hipergráfok hasonlóan definiálhatók.

Kérdés

Legalább hány éle van egy n pontú, Hamilton-út (lánc) telített hipergráfnak?

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Hamilton-lánc telített hipergráfok hasonlóan definiálhatók.

Kérdés

Legalább hány éle van egy n pontú, Hamilton-út (lánc) telített hipergráfnak?

Gráfokra Bollobás kérdezte ezt.

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Hamilton-lánc telített hipergráfok hasonlóan definiálhatók.

Kérdés

Legalább hány éle van egy n pontú, Hamilton-út (lánc) telített hipergráfnak?

Gráfokra Bollobás kérdezte ezt.
Körre megoldották: Bondy (1972); Clark, Entringer, Shapiro (1992); Ling, Jiang, Yang, Zhang (1992). $\Longrightarrow \lceil \frac{3n}{2} \rceil$

MŰEGYETEM 1782

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Hamilton-út telített, ha $\mathcal{H}$-ban nincs nyílt Hamilton-lánc (Hamilton-út), de akárhogy veszünk hozzá új élet már lesz benne.

Hamilton-lánc telített hipergráfok hasonlóan definiálhatók.

Kérdés

Legalább hány éle van egy n pontú, Hamilton-út (lánc) telített hipergráfnak?

Gráfokra Bollobás kérdezte ezt.

Körre megoldották: Bondy (1972); Clark, Entringer, Shapiro (1992); Ling, Jiang, Yang, Zhang (1992). $\Longrightarrow \lceil \frac{3n}{2} \rceil$

Útra: Dudek, Katona, Wojda (2005). $\Longrightarrow \lceil \frac{3n-5}{2} \rceil$ és $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil$ között

Eredmények hipergráfokra

Tétel (Dudek, Katona)

Ha a $\mathcal{H}$ hipergáf r-uniform és Hamilton-lánc telített, akkor

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{\binom{n}{r}}{r(n-r)+1} = O(n^{r-1}).$$

Eredmények hipergráfokra

Tétel (Dudek, Katona)

Ha a $\mathcal{H}$ hipergáf r-uniform és Hamilton-lánc telített, akkor

$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{\binom{n}{r}}{r(n-r)+1} = O(n^{r-1}).$$

Tétel (Dudek, Katona)

Minden $n \geq 7$ esetén van olyan 3-uniform hipergráf, aminek $\frac{2}{27}n^3 + o(n^3)$ éle van.

Eredmények hipergráfokra

Tétel (Dudek, Katona)

Ha a $\mathcal{H}$ hipergáf r-uniform és Hamilton-lánc telített, akkor

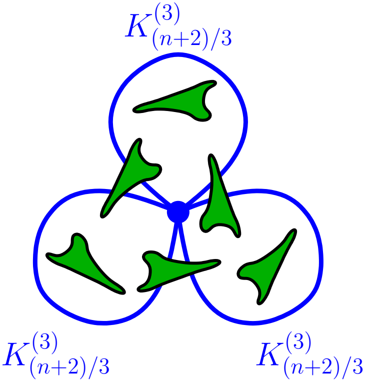
$$|\mathcal{E}(\mathcal{H})| \geq \frac{\binom{n}{r}}{r(n-r)+1} = O(n^{r-1}).$$

Tétel (Dudek, Katona)

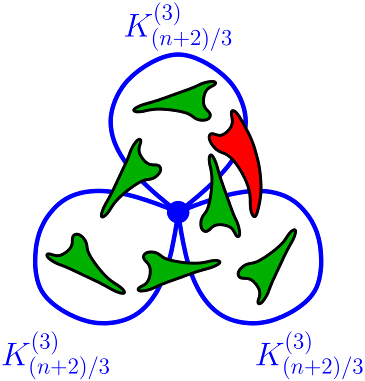
Minden $n \geq 7$ esetén van olyan 3-uniform hipergráf, aminek $\frac{2}{27}n^3 + o(n^3)$ éle van.

Azt sejtjük, hogy az élszám nagyságrendje n^{r-1}.

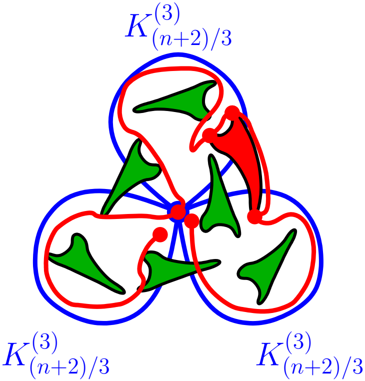
A mi konstrukciónk



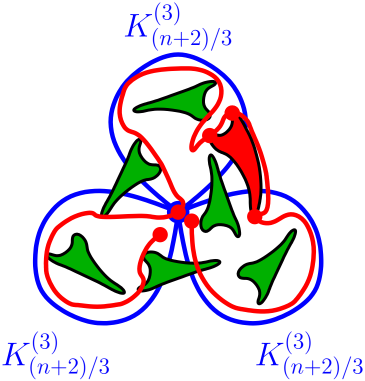
A mi konstrukciónk

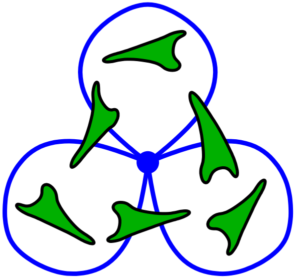


A mi konstrukciónk

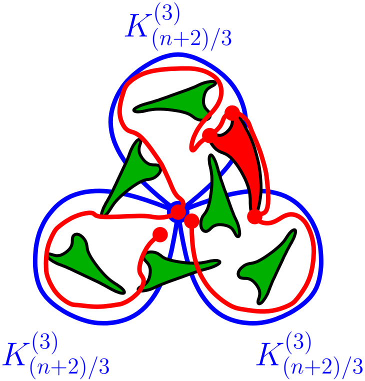


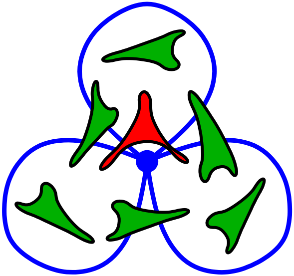
A mi konstrukciónk



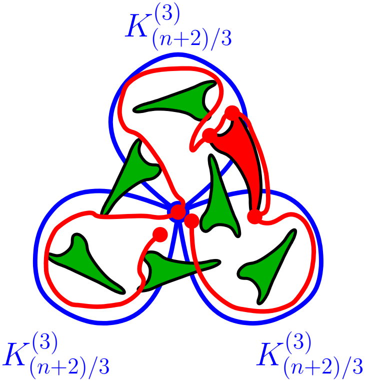


A mi konstrukciónk

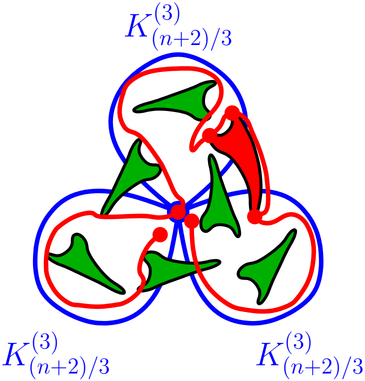


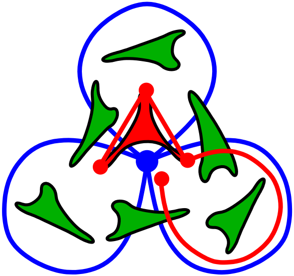


A mi konstrukciónk

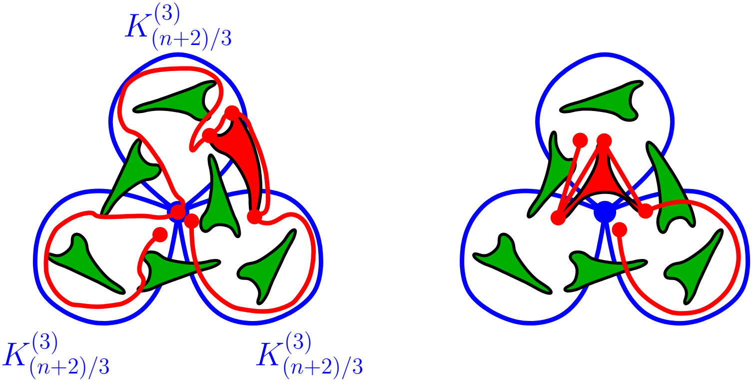


A mi konstrukciónk

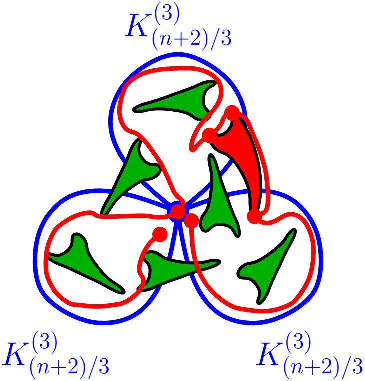


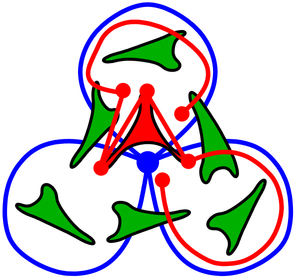


A mi konstrukciónk

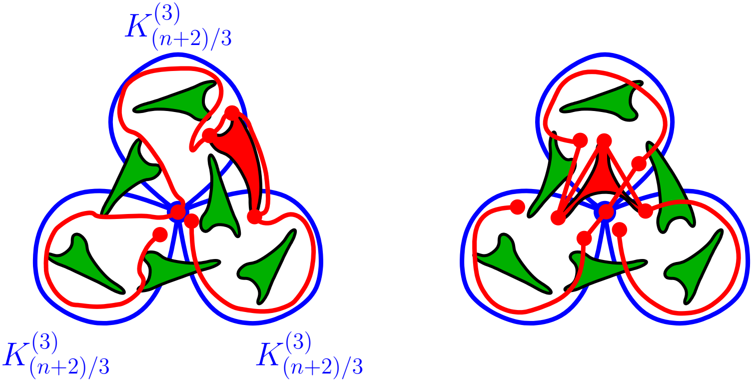


A mi konstrukciónk





A mi konstrukciónk



VÉGE