Schlotter Ildi
www.cs.bme.hu/~ildi/eszt

Függvényt kiszámoló Turing-gépek, a PCP és a Dominó probléma

Ahol nincs máshogy definiálva, ott $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Legyen legyen az $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ parciális függvény definíciója $f(1^n) = 1^{n+1}$ ha $n \geq 1$ (más helyeken f nem értelmezett). Készítsünk egy f-et kiszámoló Turing-gépet!

2. Legyen $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ egy kölcsönösen egyértelmű rekurzív függvény. Következik-e ebből, hogy f inverze is rekurzív függvény?

3. Az $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ rekurzív függvénnyel az L_1 és L_2 nyelvekre teljesül, hogy $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$. Igaz-e, hogy

   a) $L_2 \in \mathrm{RE} \Rightarrow L_1 \in \mathrm{RE}$?

   b) $L_2 \in \mathrm{R} \Rightarrow L_1 \in \mathrm{R}$?

   c) $L_1 \in \mathrm{RE} \Rightarrow L_2 \in \mathrm{RE}$?

   d) $L_1 \in \mathrm{R} \Rightarrow L_2 \in \mathrm{R}$?

4. Rekurzív-e a PCP-nek az a változata, ahol
   a) minden szópárra $|s_i| = |t_i|$ teljesül?
   b) $|\Sigma| = 1$?
   c) ha $i \neq j$, akkor s_i és s_j, valamint t_i és t_j első karaktere különböző (de pl. $s_i = t_i$ lehetséges)?

5. Jelölje $\mathcal{M}_k$ azoknak az egyszalagos, a $\{0, 1\}$ szalagábécével dolgozó, k állapotú Turing-gépeknek a halmazát, amelyek az üres szalaggal elindítva véges sok lépés után megállnak. Legyen $b(k)$ az a legnagyobb lépésszám, amit egy $M \in \mathcal{M}_k$ az üres szalaggal elindítva végrehajt mielőtt megáll. Igazolja, hogy a $b(k)$ függvény nem rekurzív.

6. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv. Igazoljuk a következő összefüggéseket:

   a) L pontosan akkor rekurzív, ha az $f_L : \Sigma^* \to \Sigma^*$ függvény rekurzív, ahol f_L az L nyelv karakterisztikus függvénye:
   $$f_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in L \\ 0, & \text{ha } x \notin L \end{cases}$$

   b) L pontosan akkor rekurzív felsorolható, ha létezik olyan parciálisan rekurzív $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ függvény, melynek értékkészlete L.

7. Legyen $((s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n); m) \in L$ az olyan esetekben, amikor az (s_i, t_i) párok által meghatározott Post megfeleltetési problémának van legfeljebb m darabból álló megoldása. Mutassa meg, hogy az L nyelv rekurzív!

8. Tekintsük a dominóproblémának azt a változatát, amikor csak egy típusú dominó van (de abból persze végtelen sok darab). Rekurzív-e az így módosított problémához tartozó nyelv?