Turing-gépek, RE és R nyelvosztályok

Ahol nincs máshogy definiálva, ott $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Legyen L a *palindrómák* nyelve: L pontosan azon Σ^*-beli szavakat tartalmaza, melyek megegyeznek a megfordítottjukkal.

    a) Adjon 1-szalagos Turing-gépet, amely L-et ismeri fel!

    b) Adjon 2-szalagos Turing-gépet, amely L-et ismeri fel, és n hosszú bemenetre $O(n)$ lépésben megáll!

2. Adjon olyan Turing-gépet, amely L-et ismeri fel, ahol

    a) $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

    b) $L = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}$ és $n \le m \le 2n\}$.

3. A 2-szalagos M Turing-gép átmeneti függvényét a következő táblázat írja le, ahol ü jelöli a szalagon az üres jelet és q_0 a kezdőállapotot:

állapot	1. szalag	2. szalag	1. szalag		2. szalag		új állapot
q_0	0	ü	0	H	X	J	q_1
	1	ü	1	H	X	J	q_1
	ü	ü	ü	H	ü	H	q_5
q_1	0	ü	0	J	0	J	q_1
	1	ü	1	J	1	J	q_1
	ü	ü	ü	H	ü	B	q_2
q_2	ü	0	ü	H	0	B	q_2
	ü	1	ü	H	1	B	q_2
	ü	X	ü	B	X	J	q_3
q_3	0	1	0	H	1	J	q_4
	1	0	1	H	0	J	q_4
q_4	0	0	0	B	0	H	q_3
	0	1	0	B	1	H	q_3
	1	0	1	B	0	H	q_3
	1	1	1	B	1	H	q_3
	0	ü	0	H	ü	H	q_5
	1	ü	1	H	ü	H	q_5

    a) Mi a 2. szalag tartalma amikor a gép q_2 állapotba kerül?

    b) Mi az $L(M)$ nyelv, ha q_5 az egyetlen elfogadó állapot?

4. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv és $L' = \{z \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, x \in \Sigma^*,\ \text{hogy } z = wxw\}$. Bizonyítsa be, hogy ha

    a) $L \in \mathrm{R}$ akkor $L' \in \mathrm{R}$

    b) $L \in \mathrm{RE}$ akkor $L' \in \mathrm{RE}$.

5. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv és $L' = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in L,\ \text{hogy } |x| = |y|\}$. Bizonyítsa be, hogy ha

    a) $L \in \mathrm{R}$ akkor $L' \in \mathrm{R}$

    b) $L \in \mathrm{RE}$ akkor $L' \in \mathrm{RE}$.

6. Az L_1 és L_2 nyelvek *konkatenáltja* az $L_1 L_2 = \{z \in \Sigma^* \mid \exists x, y : z = xy, x \in L_1, y \in L_2\}$ nyelv. Bizonyítsa be, hogy

    a) R zárt az unió és a konkatenálás műveletekre.

    b) RE zárt az unió és a konkatenálás műveletekre.

7. A közös Σ ábécé feletti $L_1, L_2, \ldots, L_k$ nyelvekről (ahol $k \ge 1$ egész szám) tudjuk, hogy
(a) páronként diszjunktak (azaz $L_i \cap L_j = \emptyset$, ha $i \ne j$),
(b) uniójuk kiadja az összes szót (azaz $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k = \Sigma^*$) és
(c) rekurzívan felsorolhatóak (azaz $L_i \in \mathrm{RE}$ ha $1 \le i \le k$).
Bizonyítsa be, hogy ekkor mindegyik L_i nyelv rekurzív.