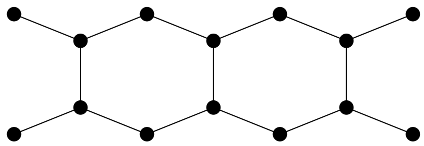
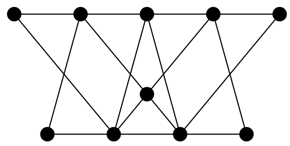
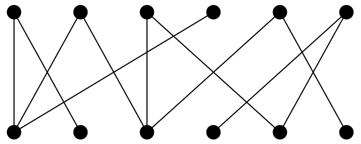
Wiener Gábor
wiener@cs.bme.hu

4. gyakorlat
Független élek, független pontok

1. Határozzuk meg az alábbi gráfokban $\nu(G)$-t, a független élek maximális számát.

a) 

b) 

c) 

2. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Mutassuk meg, hogy van a gráfban teljes párosítás.

3. Lássuk be, hogy minden fa páros gráf, és legfeljebb egy teljes párosítása lehet.

4. Legyen G egy egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét pontosztályában n pont van, és az egyik pontosztályában minden pont foka különböző. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges n csúcsú egyszerű G gráfra igazak a következők:

   a) $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.
   b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.
   c) $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$.

6. Mutassuk meg, hogy minden egyszerű, n pontú síkbarajzolható gráfra $\alpha(G) \geq \frac{n}{4}$.

7. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző csokit úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokik közül, és az is igaz, hogy ha valaki nem szeret egy adott csokit, akkor a házastársa biztosan szereti azt. Bizonyítsuk be, hogy szétoszthatók a csokik úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

8. Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

9. Bizonyítsuk be, hogy minden k-reguláris páros gráfban ($k \geq 1$) van teljes párosítás. (Egy gráf k-reguláris, ha minden pontjának a foka k.)

---

10. Bizonyítsuk be, hogy minden r-reguláris páros G gráfra $\chi_e(G) = r$.

11. Bizonyítsuk be, hogy minden páros G gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$.

12. Egy 100 csúcsú G páros gráf minden csúcsának foka 20. Állapítsuk meg $\tau(G)$ értékét.

13. Legyen G olyan egyszerű gráf, melynek 1000 csúcsa van, és minden csúcs foka legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.

14. Adott egy $n \times n$-es mátrix, melynek minden sorában és oszlopában pontosan k darab egyes van, a többi elem nulla. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki.

15. Egy $r \times n$ méretű táblázatot latin téglalapnak hívnak, ha a táblázat elemei az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok közül kerülnek ki, és mindegyik szám minden sorban és oszlopban legfeljebb egyszer szerepel. Igazoljuk, hogy ha $r < n$, akkor tetszőleges $r \times n$ méretű latin téglalap kiegészíthető $n \times n$ méretűvé (azaz latin négyzetté).