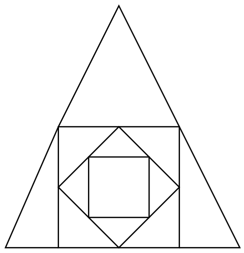
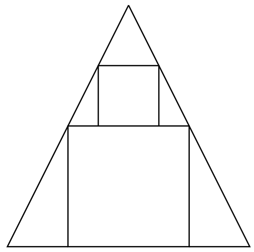
Wiener Gábor
wiener@cs.bme.hu

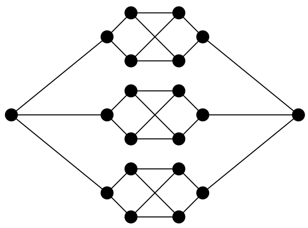
1. gyakorlat
Euler-kör, Hamilton-kör

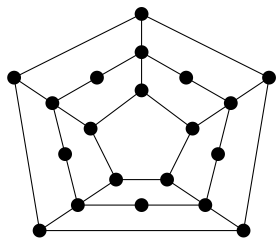
1. Le lehet-e rajzolni az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül? Ha igen, rajzoljuk is le.

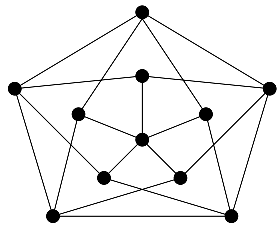
a) 

b) 

2. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfokban? És Hamilton-út?

a) 

b) 

c) 

3. Egy 20 tagú társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer a többiek közül. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy kör alakú asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismeri a szomszédjait, vagy úgy, hogy senki nem ismeri egyik szomszédját sem.

4. Legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$, i és j akkor szomszédosak, ha $i + j$ páratlan. Van-e Hamilton-kör G-ben? Ha van, adjunk is meg egyet.

5. Bejárható-e a 4×4-es, illetve 5×5-ös sakktábla lólépésben úgy, hogy minden mezőre pontosan egyszer lépünk rá? Mi a helyzet, ha azt is megköveteljük, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

6. Igazoljuk, hogy ha egy $2k + 1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út.

7. Mutassuk meg, hogy minden n-re létezik olyan n csúcsú egyszerű gráf, melynek $\binom{n-2}{2} + n - 1$ éle van és nincs benne Hamilton-kör.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n csúcsú egyszerű gráfnak legalább $\binom{n-2}{2} + n$ éle van, akkor biztosan van benne Hamilton-kör.

9. Elkészíthető-e egy 4×4-es, 1 cm-es élhosszúságú mezőkből álló négyzetháló 8 db 5 cm-es zsinórdarabból (olló használata nélkül)? És 5 db 8 cm-es darabból?

---

10. A tangótáncosok találkozóján 20 fiú és 20 lány vesz részt. Mindenki pontosan 12 embert ismer az ellenkező neműek közül. A résztvevők a következőt játsszák: egy fiú kiválasztja egy lányismerősét és felkéri tangózni, aztán a lány kéri fel egy fiúismerősét, stb. A szabály az, hogy akit legutóbb felkértek, az az ellenkező nemű ismerősei közül egy olyat kérjen fel, akivel még nem táncolt. A társaság célja, hogy végül mindenki elmondhassa magáról, hogy a játék során minden ellenkező nemű ismerősével pontosan egszer tangózott. Megvalósítható-e ez a cél?

11. Jelölje $G(n, k)$ azt a gráfot, melynek csúcsai az $n \times k$ méretű táblázat mezői, két csúcs pedig akkor szomszédos, ha a megfelelő mezőknek van közös oldaluk. Mely (n, k) értékekre van $G(n, k)$-ban Euler-kör illetve -út? És Hamilton-kör illetve -út?

12. A G gráf pontjai egy 8-elemű halmaz 2-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e G-ben Euler-kör? És Hamilton-kör?

13. Legyenek a G gráf pontjai az n hosszú 0-1 sorozatok ($n \geq 3$). A gráf két pontja között pontosan akkor van él, ha a nekik megfelelő sorozatok legalább 2 helyen eltérnek. Milyen n esetén van G-ben Euler-kör? És Hamilton-kör?

14. Egy szállodába egy 100 fős társaság érkezett hosszabb időre, akik közül kezdetben bármely két ember jóban volt egymással. Minden vacsorához egy kerek asztal köré ülnek le úgy, hogy vacsora elején mindenki jóban van a mellette ülőkkel, de sajnos a vacsora végére mindenki összeveszik a szomszédaival. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 napon keresztül tudnak így vacsorázni!

15. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka 4, akkor az élei kiszínezhetők piros és kék színnel úgy, hogy minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.