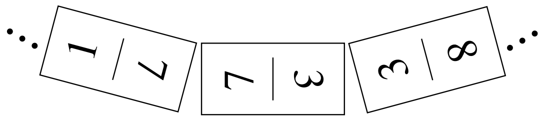
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok megoldása
2007. március 30.

Ez a példamegoldás minden feladatra csak egy lehetséges megoldást ad, természetesen bármely más jó megoldást is elfogadunk. Ha hibát találtok valahol, azt kérlek jelezzétek nekem emailben! Köszönöm!

Schlotter Ildi

1. Egy dominókészlet minden dominójának két felén két különböző, 1 és n közötti egész szám áll (ahol $n > 1$ egész). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk két különböző 1 és n közötti egészt, pontosan egy olyan dominó van a készletben, aminek két felén épp a két kiválasztott szám áll. A feladatunk az, hogy a készlet összes dominóját elhelyezzük egyetlen körben úgy, hogy az egymás mellé kerülő dominófeleken azonos szám álljon (lásd az ábrát). Határozzuk meg, hogy mely n-ek esetén létezik ilyen elhelyezés!



Megoldás.

Számozzuk meg az n pontú teljes gráf csúcsait az 1 és n közé eső egészekkel. Ekkor minden dominónak egyértelműen megfeleltethető a gráf egy éle: az x és y számokat tartalmazó dominót az x és y címkéjű pontokat összekötő él reprezentálja.

Ekkor egy olyan dominósorozat, melyben az egymás melletti dominófeleken azonos szám áll, megfelel egy sétának a gráfban. Emiatt a dominók egy megfelelő elrendezése éppen egy olyan zárt élsorozat lesz a gráfban, amely minden élet tartalmaz - vagyis egy Euler-kör.

A kérdés tehát az, hogy mely n-ekre létezik az n pontú teljes gráfban Euler-kör. Mivel minden teljes gráf összefüggő, így pontosan akkor van K_n-ben Euler-kör, hogyha benne minden pont foka páros. K_n egy tetszőleges csúcsának a foka $n-1$, vagyis ez pontosan akkor lesz páros, ha n páratlan.

A válasz tehát az, hogy pontosan akkor létezik megfelelő elrendezése a dominóknak, ha n páratlan.

2. A G gráf csúcsai legyenek egy (8×8-as) sakktábla mezői. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők egy futóval egy lépésben elérhetők egymásból. Határozzuk meg G kromatikus számát! (A sakkban a futó csak átlósan mozoghat, de egy lépésben egy kiválasztott $\pm 45°$-os egyenes mentén tetszőlegesen sok mezőt léphet.)

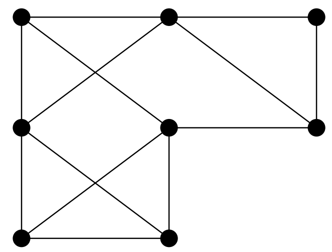
Megoldás.

Először is vegyük észre, hogy a sakktábla valamely átlójának megfelelő 8 G-beli pont egy klikket alkot G-ben, hiszen az átló bármely két mezője egymásból egy lépéssel elérhető futóval. Emiatt $\omega(G) \geq 8$, amiből $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 8$.

Emellett G kiszínezhető 8 színnel. Ehhez színezzük G-t úgy, hogy az 1. oszlop mezőihez használjuk az 1. színt, a 2. oszlop mezőihez a 2. színt, stb, azaz a k. oszlop mezőinek színe legyen k. Ekkor 8 színt használtunk, és mivel az egy oszlopban lévő mezők nem szomszédosak, ezért az egyszínű pontok függetlenek, a színezés helyes.

Tehát $\chi(G) = 8$.

3. Döntsük el, hogy perfekt-e az alábbi gráf!



Megoldás.

Ha a gráfból elvesszük a bal felső, bal alsó és jobb felső pontokat, akkor a maradék 5 pont egy kört feszít. Ehhez ellenőrizni kell, hogy egyrészt a kör 5 éle valóban benne van a gráfban, másrészt a kör komplementerének 5 éle valóban hiányzik a gráfból.

Mivel a gráf tehát tartalmaz egy 5 hosszú kört feszített részgráfként, az erős perfekt gráf tétel (triviális iránya) miatt nem lehet perfekt. (Az erős perfekt gráf tétel állítása: egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha nem tartalmaz feszített részgráfként sem legalább 5 hosszú páratlan kört, sem pedig legalább 5 hosszú páratlan kör komplementerét.)

4. A G egyszerű gráfban a legnagyobb fokszám legyen Δ. Készítsük el a G' gráfot a következőképpen: G'-be vegyük fel G minden csúcsát és élét, továbbá G minden v csúcsa esetén vegyünk fel egy új v' csúcsot, amelyet kössünk össze v-vel; végül G minden $\{u, v\}$ élére G'-ben a megfelelő u' és v' csúcsokat is kössük össze. Mutassuk meg, hogy a kapott G' gráf élkromatikus száma $\chi_e(G') = \Delta + 1$.

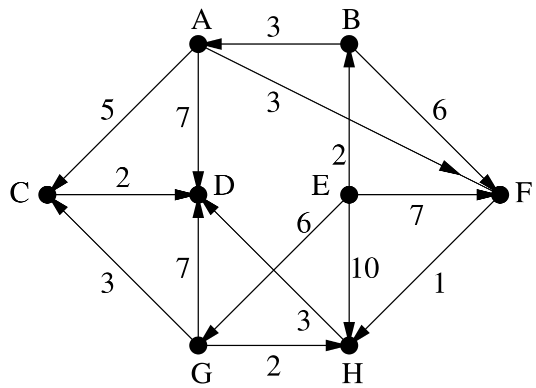
Megoldás.

Vizing tétele alapján G élei kiszínezhetők $\Delta + 1$ színnel. Rögzítsük G-nek egy optimális (Δ színt használó) élszínezését, és jelöljük az xy élen használt színt $c(xy)$-nal. Színezzük ki G' éleit a következőképpen. Tetszőleges G-beli xy élre a G'-beli xy él színe is legyen most is $c(xy)$, és ugyanez legyen a színe az $x'y'$ élnek is. Ez eddig nyilván jó színezés, hiszen valójában két diszjunkt, G-vel izomorf részgráfját színeztük G'-nek.

Most már csak minden x csúcsra az xx' élet kell kiszíneznünk. Az x-re illeszkedő éleket pontosan úgy színeztük, mint az x'-re illeszkedőket, így az xx' él mindkét végpontjára az eddig használt színek halmaza ugyanazt a $d(x)$ darab színt tartalmazza, ahol $d(x)$ az x csúcs G-beli foka. Ezért legfeljebb $d(x) \leq \Delta$ darab színt nem használhatunk xx' színezésére, vagyis az összesen használható $\Delta + 1$ szín közül valamelyik biztosan megfelel.

Ezzel a módszerrel tehát minden élet ki tudtunk színezni $\Delta + 1$ színnel. Mivel G'-ben a legnagyobb fokszámú csúcs foka $\Delta + 1$, és minden gráfban az élkromatikus szám legalább a maximális fokszám, ezért $\chi_e(G') = \Delta + 1$.

5. Bontsuk emeletekre a PERT diagram irányított gráfját, majd határozzuk meg a feladat elvégzéséhez szükséges minimális időt és a kritikus részfeladatokat!



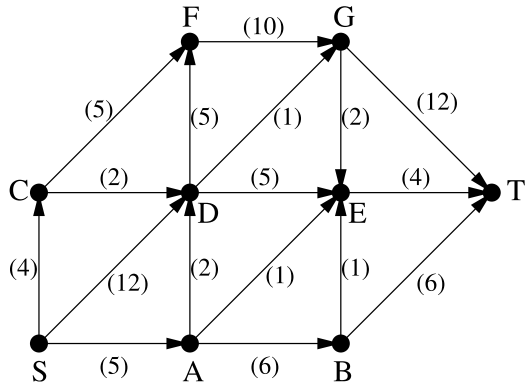
Megoldás.

Egy lehetséges emeletekre bontás: $E \mid B \mid A \left| \begin{array}{c} G \\ F \end{array} \right| \begin{array}{c} C \\ H \end{array} \left| D \right.$. Innen egy lehetséges topologikus sorrend a következő: E, B, A, F, G, H, C, D. Az egyes csúcsokhoz tartozó feladatok elvégzéséhez szükséges idők:

$t(E) = 0$
$t(B) = t(E) + 2 = 2$, és EB adja a maximumot,
$t(A) = t(B) + 3 = 5$, és BA adja a maximumot,
$t(F) = \max\{t(E) + 7, t(B) + 6, t(A) + 3\} = 8$, és BF valamint AF is maximális értéket ad,
$t(G) = t(E) + 6 = 6$, és EG adja a maximumot,
$t(H) = \max\{t(E) + 10, t(F) + 1, t(G) + 2\} = 10$, és EH adja a maximumot,
$t(C) = \max\{t(A) + 5, t(G) + 3\} = 10$, és AC adja a maximumot,
$t(D) = \max\{t(A) + 7, t(G) + 7, t(H) + 3, t(C) + 2\} = 13$, és GD és HD adja a maximumot.

Vagyis a tevékenységek elvégzéséhez szükséges összidő 13 egység. Két kritikus út található a gráfban: $E - G - D$ és $E - H - D$. Tehát a kritikus részfeladatok: E, G, H és D.

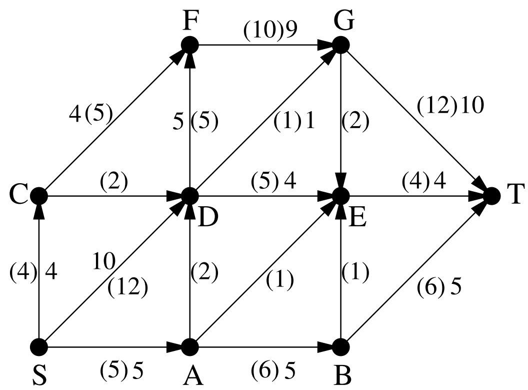
6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális ST-vágást (és bizonyítsuk be róla, hogy minimális)!



Megoldás.

A minimális ST-vágást G-ben a pontok következő felosztása adja. Legyen $X = \{S, D, E\}$ és $\overline{X} = \{A, B, C, F, G, T\}$, ekkor a vágásban szereplő (X-ből $\overline{X}$-be mutató) élek: SC, SA, DF, DG, ET. Innen a vágás értéke $4 + 5 + 5 + 1 + 4 = 19$.

Ennek a vágásnak a minimalitását igazolhatjuk egy 19 értékű folyam megadásával. Egy megfelelő folyamot berajzoltam az ábrán (azon az élen, ahol csak a kapacitás szerepel, a folyam 0 értéket vesz fel):



7. A $2n$ csúcsú G egyszerű gráfban a nemszomszédos u és v csúcsok foka $n-1$, az összes többi csúcs foka legalább n (ahol $n > 1$ egész). Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás!

Megoldás.

Konstruáljuk a G' gráfot úgy, hogy G-ben összekötjük az u és a v pontokat. Ekkor G'-ben minden pont foka legalább n lesz. Mivel G'-nek $2n$ darab pontja van, így a Dirac-tétel miatt G'-ben található Hamilton-kör. Viszont egy Hamilton-kört tartalmazó gráfból egy élet elhagyva a maradék gráfban mindig van Hamilton-út, emiatt G'-ből az uv élet kivéve a visszakapott G gráfban biztosan van Hamilton-út. De G pontjainak száma páros, így benne egy tetszőleges Hamilton-út minden páratlanadik éle épp egy teljes párosítás lesz G-ben.

8. Legyen G egy 100 csúcsú gráf és $x, y \in V(G)$ különböző csúcsok. Tudjuk, hogy bárhogyan választjuk G-ben az $u, v \in V(G)$ csúcsokat úgy, hogy azok x-től és y-tól különbözzenek, G-ben van olyan út, amely x-ből y-ba vezet és nem tartalmazza sem u-t, sem v-t. Mutassuk meg, hogy ekkor x-ből y-ba vezet olyan út, amelynek hossza (éleinek száma) legföljebb 33.

Megoldás.

A feladat szövege épp azt az állítást fogalmazza meg, hogy G-ben az x és y között futó utakat lefogó (x-től és y-tól különböző) pontok minimális száma legalább 3, hiszen 2 (x-től és y-tól különböző) pont törlése nem elég ahhoz, hogy elvágjuk x-et y-tól. Ekkor Menger megfelelő tétele szerint az x és y között futó pontdiszjunkt utak maximális száma szintén legalább 3. Ez azt jelenti, hogy megadható 3 pontdiszjunkt út x és y között, legyenek ezek P_1, P_2 és P_3.

Most tegyük fel indirekt módon, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis minden x-ből y-ba vezető út hossza legalább 34. Ekkor persze a P_1, P_2 és P_3 utak hossza is legalább 34, azaz belső pontjaik száma fejenként legalább 33. Ezen 3 útnak azonban nem lehetnek közös belső pontjaik, így ez összesen már legalább 99 egymástól, valamint x-től és y-tól különböző pontot jelent, ami ellentmond annak, hogy G-nek 100 pontja van. Az állítást ezzel igazoltuk.