

13. gyakorlat Számosságok

- Adjuk meg a következő halmazok számosságát:
 - A természetes számok k elemű részhalmazai, ahol k egy rögzített pozitív egész.
 - A természetes számok véges részhalmazai.
 - A természetes számok részhalmazai.
 - A magyar nyelven írható véges hosszúságú szövegek.
 - Azok az x és y karakterekből álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
 - Az olyan, a és b betűkből készített, végtelen hosszú sorozatok, amelyekben minden n pozitív egészhez található n darab szomszédos b betű.
 - A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
 - A valós számokból álló végtelen sorozatok.
 - Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
 - Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
 - Az összes olyan, origóból induló és véges sok lépés után ugyanott véget érő séta, melynek minden lépése az x vagy az y tengellyel párhuzamos egységszakasz.
- Hány egyenessel lehet lefedni a síkot?
- Legfeljebb hány körlap helyezhető el a síkon úgy, hogy ne messék egymást?
- Adjunk bijekciót (oda-vissza egyértelmű leképezést) az alábbi halmazok között.
 - $[0, 1]$ és $(0, 1)$
 - $(0, 1)$ és $(-\infty, \infty)$
 - $(0, \infty)$ és $(-\infty, \infty)$
- Legyen H tetszőleges halmaz. Egy $f : P(H) \rightarrow P(H)$ függvényt akkor nevezünk *monoton növekvőnek*, ha minden $X, Y \subseteq H$, $X \subseteq Y$ esetén $f(X) \subseteq f(Y)$ teljesül.
 - Bizonyítsuk be, hogy ha $f : P(H) \rightarrow P(H)$ monoton növekvő, akkor van *fixpontja*, vagyis létezik olyan $Z \subseteq H$ halmaz amelyre $f(Z) = Z$.
 - A fenti állítást felhasználva bizonyítsuk be a Cantor-Bernstein tételt.
- Határozd meg az alábbi halmazok számosságát!
 - az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvények halmaza;
 - az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoton növekvő függvények halmaza;
 - az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza;
 - az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ függvények halmaza;
 - az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ kölcsönösen egyértelmű függvények halmaza.
- Egy valós számot nevezünk kiszámíthatónak, ha van hozzá olyan C nyelven írt program, amellyel a tizedesjegyeit meghatározhatjuk (pl. az n bemenetre a program megadja a szám n -edik tizedesjegyét). Mutassuk meg, hogy létezik nem kiszámítható szám. (A feladat éppen arról szól, hogy egy ilyet megadni képtelenség.)
- Egy tengeralattjáró egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és percnként felbukkan egész koordinátájú pontokban. Írható-e előre (a kiindulási pont és a mozgásirány ismerete nélkül) program a tengeralattjáró megsemmisítésére, ha minden percben egyetlen pontra lőhetünk?
- A természetes számok halmazának legfeljebb milyen sok részhalmaza adható meg úgy, hogy bármely kettő metszete véges legyen?