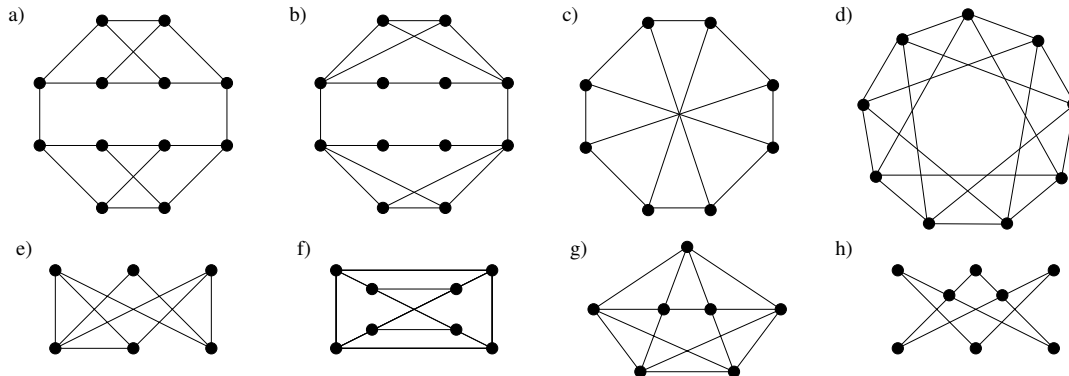


12. gyakorlat Síkbarajzolható gráfok, dualitás

1. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok? (Ha igen, rajzoljuk le őket, ha nem, mutassuk meg, hogy miért nem!)



2. Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a komplementere \bar{G} nem síkbarajzolható?
3. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
 - a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
 - b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
4. Van-e olyan egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
5. Adjunk felső becslést egy síkbarajzolható gráf élleinek számára, ha minden körének hossza legalább k .
6. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
7. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
8. Egy síkságon öt ház és öt kút áll. Minden háztól minden kúthoz külön ösvényt kell építenünk. Az építendő ösvények némelyike keresztezheti egymást, de egy-egy kereszteződésben legfeljebb két ösvény találkozhat. Mutassuk meg, hogy ekkor kilencnél kevesebb kereszteződéssel biztosan nem megoldható a feladat.
9. Bizonyítsd be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, melyre igaz, hogy a $K_{n,n}$ gráf lerajzolásához szükséges élkereszteződések száma (ha három él nem találkozhat közös pontban) legalább $c \cdot n^4$ minden $n \geq 3$ esetén!
10. Bizonyítsd be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai kiszínezhetőek 5 színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek!
11. Egy gráfban *élösszehúzásnak* nevezik azt a műveletet, melynek során egy él két végpontját egyetlen csúccsal helyettesítjük, összekötve azt minden olyan csúccsal, mely valamelyik végponttal össze volt kötve. (Az ilyenkor esetleg létrejövő párhuzamos és hurokéleket töröljük.) A G gráfnak *minorja* a H gráf, ha H megkapható G valamely részgráfjából élösszehúzásokkal. Wagner tétele a következőt állítja: egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nincs K_5 -tel vagy $K_{3,3}$ -mal izomorf minorja.
 - a) Bizonyítsd be Wagner tételét a Kuratowski-tétel felhasználásával!
 - b) Bizonyítsd be a Kuratowski-tételt Wagner tételének felhasználásával!
12. Egy gráfot *külsíkgráf*nek nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van egyik (például a külső) tartomány határán. Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges) \mathcal{F} gráfhalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz \mathcal{F} -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot!