

## 11. gyakorlat Gráfelméleti alapfogalmak

1. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámai:
  - a) 1, 2, 2, 3, 3, 3 ?
  - b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ?
  - c) 8, 8, 8, 5, 5, 5, 3, 2, 2 ?
2. Egy  $n$  pontú gráfban minden pont foka legalább  $\frac{n}{2}$ . Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?
3. Van-e olyan legalább két pontú egyszerű gráf, melyben minden pont foka különböző?
4. Egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább  $k$ . Bizonyítsd be, hogy a gráfban található legalább  $k + 1$  pontú kör!
5. Egy fában a legnagyobb fokszám  $\Delta$ . Mutasd meg, hogy a fában legalább  $\Delta$  elsőfokú pont van!
6. Bizonyítsd be, hogy minden fában van olyan pont, amit az összes leghosszabb út tartalmaz.
7. Hány egymással nem izomorf 60 csúcsú, 1768 élű egyszerű gráf létezik?
8. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden pont foka legalább 33. Igaz-e, hogy mindenképp hozzávehető a gráfhoz egyetlen új él úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen?
9. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráf és komplementere közül legalább az egyik összefüggő!
10. Egy kisváros utcáinak hálózata összefüggő, egyszerű gráfot alkot. Mivel az utcák nagyon keskenyek, a polgármester szeretné az összeset egyirányúsítani.
  - a) Ráadásul a polgármester szeretné ezt úgy megtenni, hogy a gráf minden csúcsából páratlan sokfelé lehessen elindulni (az irányításnak megfelelően). Bizonyítsd be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor készíthető, ha az élek és csúcsok számának paritása egyezik!
  - b) Valaki felhívja a polgármester figyelmét arra, hogy a fenti feltételnél sokkal lényegesebb, hogy az egyirányúsítás után is mindenhonnan el lehessen jutni mindenhova. Bizonyítsd be, hogy ilyen irányítás akkor és csak akkor készíthető, ha a gráf tetszőleges élének elhagyása után is összefüggő marad! (Itt már nem feltétel, hogy minden csúcsból páratlan sok utcán lehessen elindulni.)
11. Mely  $n$ -ekre létezik olyan  $n$  csúcsú egyszerű gráf, mely izomorf a komplementerével?
12. Bizonyítsd be, hogy minden társaság szétesztható (legfeljebb) két csoportra úgy, hogy mindenkinek a saját csoportján belül páros sok ismerőse legyen!