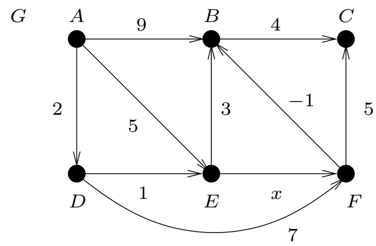
Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

9. gyakorlat
Mélységi bejárás és alkalmazásai, DAG-ok



1. Milyen feszítőfát kapunk a $G = K_n$ gráf mélységi bejárása esetén? És ha $G = K_{n,m}$?

2. Határozza meg az A-ból a többi pontba vezető leghosszabb utak hosszát az alábbi G gráfban az x valós paraméter függvényében!

3. Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk elérni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Tudjuk, hogy bármely két város között az elfogyasztott benzin mennyisége, valamint L is egy egész szám. Az egyszerűség kedvéért, ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni, ha azt akarjuk, hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen.

4. Legyen adott egy $n \times n$ pixelből álló fekete-fehér kép. Szeretnénk a képen a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig egy jobbra-lefele haladó határvonalat húzni úgy, hogy a vonaltól jobbra-felfele eső fekete, valamint a vonaltól balra-lefele eső fehér pixelek számának az összege a lehető legkisebb legyen. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n^2)$ időben!

5. Bizonyítsuk be, hogy minden hurokélmentes $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!

6. Éllistával adott az n pontú $G(V, E)$ gráf, melynek minden e éle egy $c(e) > 0$ élsúllyal van ellátva. Egy adott $s \in V$ csúcsból akarunk egy adott $t \in V$ csúcsba eljutni a legolcsóbb módon, de az út költségét a szokásostól eltérően számoljuk: ha az e él az út s-től számított k-adik éle, akkor $k \cdot c(e)$ költséggel járul hozzá az út költségéhez. Adjon algoritmust, amely meghatározza az ilyen értelemben vett legolcsóbb út költségét $O(n(n + |E|))$ lépésben.

7. Van n fájlunk, az i-edik fájl hosszát jelölje a h_i. Tegyük fel, hogy a h_i számok egészek. Mentéshez két egyformán L méretű lemez áll rendelkezésünkre (L pozitív egész szám). A cél, hogy minél nagyobb k számra az első k darab fájl mindegyikét mentsük ki a lemezekre. Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre. Adjon algoritmust, ami adott L és h_i számokhoz meghatározza, hogy melyik fájlt melyik lemezre tegyük ahhoz, hogy k a lehető legnagyobb legyen. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(L^2)$.

Gyakorlás:

1. Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
   (a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
   (b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
   (c) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
   (d) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?

2. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.

3. Kutyasétáltatáskor egy parkban egy gazda egy rögzített, egyenes szakaszokból álló útvonalon halad, aminek töréspontjai $t_1, \ldots, t_n$, a bejáratot jelölje t_0, a kijáratot t_{n+1}. A kutyája szabadon szaladgál, de a t_i pontokban találkozik a gazdájával. A t_i és t_{i+1} pontokban való találkozás között a kutya szeretne egy fát is meglátogatni (minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legfeljebb egyet-egyet). Legyenek adottak az $s(t_i, t_{i+1})$ távolságok ($0 \leq i \leq n$), valamint minden fának az összes t_i ponttól vett távolsága. Tegyük fel, hogy két találkozás között a kutya legfeljebb kétszer akkora távolságot tud megtenni, mint a gazda. Adjon algoritmust, ami segít a kutyának eldönteni, hogy mikor melyik fát látogassa meg ha a kutya célja, hogy minél több fánál járjon. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2 f + n f^2)$, ahol f a parkban levő fák számát jelöli.