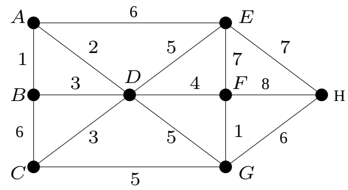
Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

10. gyakorlat
Minimális súlyú feszítőfa

1. Keressünk az alábbi gráfban minimális költségű feszítőfát
   a) Prim algoritmusával.
   b) Kruskal algoritmusával.



2. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, öszefüggő) n pontú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G-ből a v_1 csúcs, valamint a v_1-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk $O(n \log n)$ idejű algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának az elkészítésére!

3. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
   ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
   ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
   VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
   Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.

4. Mátrixával adott egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy, a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

5. Legyen $G = (V, E)$ egy súlyozott irányítatlan gráf, melyben minden él súlya pozitív. Tudjuk, hogy G összefüggő, de nem teljes gráf. A G gráfhoz egy 0 súlyú élt akarunk hozzáadni úgy, hogy a keletkező gráfban a minimális feszítőfa súlya a lehető legkisebb legyen. Adjon $O(|V|^3)$ lépésszámú algoritmust, ami a mátrixával adott G gráfra meghatározza, hogy melyik két, a G-ben nem összekötött pont közé húzzuk be az új élet.

6. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan G gráf csupa különböző élsúlyokkal. Jelöljük n-nel a csúcsok, e-vel pedig az élek számát. Mutassunk egy $O(e)$ uniform költségű algoritmust, amely a G gráf valamely minimális feszítőfájának $\lfloor n/2 \rfloor$ élét előállítja!

Gyakorlás:

1. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok kaphatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).
   a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról a saját grafikus terminálunk által megértett formátumra a lehető leggyorsabban konvertáljunk! (Az ár nem számít.)
   b) Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha azt szeretnénk a lehető legolcsóbban megoldani, hogy a megvett programok segítségével bármelyik formátumról bármelyik más formátumra képesek legyünk konvertálni. (Itt a futási idő nem számít).

2. Mátrixával adott egy G irányítatlan, összefüggő, élsúlyozott gráf. Adott még G-nek egy f éle és egy F minimális súlyú feszítőfája. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy meddig lehet f súlyát emelni úgy, hogy F a gráf egy minimális súlyú feszítőfája maradjon!