Schlotter Ildi
ildi@cs.bme.hu

1. gyakorlat
Nagyságrendek, elágazás és korlátozás

1. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön! Indokolja is meg, miért jó a választott sorrend!
   $f_1(n) = 8n^{2.5}$, $f_2(n) = 5\sqrt{n}+1000n$, $f_3(n) = 2^{\log^2 n}$, $f_4(n) = 2010n^2 \log n$.
2. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $T(n)$. Tudjuk, hogy minden $n > 1$ egész számra $T(n) \leq T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)+n$ teljesül, valamint $T(1) = 1$. Bizonyítsa be, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n \log n)$.
3. Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
   (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
   (b) minden x bemeneten legfeljebb $2010|x|$ lépést használ?
   (Itt $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)
4. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás-e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint fele helyesen működik. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva talál egy jó chipet.
5. Hány összehasonlítással lehet megtalálni n elem közül a legkisebbet? És a két legkisebbet?
6. Egy $2 \times n$-es sakktábla mezőin n piros és $n - 1$ kék négyzetet helyezünk el. Ezeket olyan módon akarjuk átrendezni, hogy a felső sorban piros, az alsóban kék négyzetek legyenek, s a bal alsó sarok maradjon üres. Ehhez egy-egy lépés során az üres mezőre tolhatjuk valamelyik szomszédját. Bizonyítsuk be, hogy ehhez
   (a) $O(n^2)$ lépés elégséges és (b) $\Omega(n^2)$ lépés szükséges.
7. Adjunk algoritmust, amely adott G gráfban keres egy 100 méretű lefogó ponthalmazt, ha van ilyen.
8. Adjunk hatékony algoritmust, amely egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban talál egy olyan $S \subseteq V$ ponthalmazt, melyre az $(S, V \setminus S)$ mérete (azaz az S és $V \setminus S$ között futó élek száma) legalább $|E|/2$.
9. Egy tanteremben fel van szerelve egy $n \times n$-es tábla, melyen n^2 villanykörte helyezkedik el. A tábla minden egyes sorához illetve oszlopához tartozik egy-egy nyomógomb, mellyel a megfelelő sorban (oszlopban) található n darab villanykörte állapotát egyszerre lehet átváltoztatni az ellenkezőjére. (Egy gombnyomásra az adott sorban illetve oszlopban égő körték elalszanak, az alvók pedig kigyulladnak.) A szünet kezdetekor az összes körte leoltott állapotban van. Szünetben a nebulók össze-vissza nyomogatják a gombokat. Hány kapcsolással tudja a tanár visszaállítani az eredeti állapotot? (A gombok egyállapotúak, azaz nem látszik rajtuk, hogy megnyomták-e őket vagy sem.)

Gyakorlás:

1. Van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb gépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen 1 nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén
   (a) n-nel, (b) n^3-nel, (c) 2^n-nel arányos?
2. Egy algoritmus maximális lépésszáma az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Tudjuk, hogy $n > 3$ esetén $L(n) \leq L(n-1) + \frac{n}{2}$ teljesül, és hogy $L(3) = 3$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$?
3. Igaz-e, hogy
   (a) ha $f(x) = O(g)$ és $g(x) = O(h(x))$, akkor $f(x) = O(h(x))$?
   (b) ha $f(x) = \Omega(g(x))$ és $g(x) = \Omega(h(x))$, akkor $f = \Omega(h(x))$?
   (c) ha $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$?
4. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy tetszőleges n csúcsú, e élű gráfon $O(n + e)$ lépést tesz. Mutassa meg, hogy az is igaz, hogy összefüggő gráfokon az algoritmus lépésszáma $O(e)$.
5. Hány összehasonlítással lehet megtalálni n elem közül a legkisebbet és a legnagyobbat?
6. Igazoljuk, hogy bármely algoritmus, mely az A adjacencia mátrixával megadott $n \geq 3$ pontú irányítatlan gráfról eldönti, hogy erdő-e, kedvezőtlen esetben A-nak legalább $\binom{n}{2}$ elemet olvassa.
7. n dobozban golyók vannak szétosztva úgy, hogy a k-adik dobozba éppen k golyó esik. Adjunk optimális lépésszámú módszert az összes doboz kiürítésére, ha a megengedett lépés a következő: jelöljünk ki tetszőleges számú dobozt, és mindegyikből vegyünk ki ugyanannyi golyót.