Algoritmuselmélet zárthelyi
2010. április 19.

1. Legyen $f_1(n) = n^{3\log n}$ és $f_2(n) = 2010 \cdot 4^{\log n \cdot \log n}$. Igaz-e, hogy $f_1 = O(f_2)$, illetve, hogy $f_2 = O(f_1)$?

2. Igaz-e, hogy az $A[1] = 3$, $A[2] = 15$, $A[3] = 10$, $A[4] = 25$, $A[5] = 29$, $A[6] = 17$, $A[8] = 28$, $A[9] = 30$ tömb egy kupacot tartalmaz? Ha igen, rajzolja le a kupacot és a rajzon hajtsa végre a BESZÚR(11) műveletet!

3. Az A tömbben n különböző számot tárolunk. Tudjuk, hogy $A[1] > A[2]$ és $A[n-1] < A[n]$. Adjon algoritmust, mely $O(\log n)$ összehasonlítással megtalál a tömbben egy lokális minimumot (ha van), azaz egy olyan $1 \leq i \leq n$ indexet, hogy $A[i]$ tömbbeli szomszédai nagyobbak, mint $A[i]$.

4. Adott $2^k - 1$ különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy $O(k)$ mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjon olyan algoritmust, amely ezt $O(n)$ lépésben megcsinálja!

5. Előfordulhat-e, hogy egy piros-fekete fában a KERES művelet végrehajtása során bejárt nem levél csúcsokban sorban a 2, 20, 12, 5, 8, 15, 10 elemeket találjuk?

6. Egy M méretű hash-táblába $n < M$ elemet raktunk be nyitott címzéssel, kvadratikus próbával, a $h(x)$ hash-függvényt használva. Ennek során t_1 ütközés történt (ennyiszer kellett tovább próbálkoznunk, egy elem beszúrása során több ütközés is lehetett). Ugyanezt az n elemet ugyanabban a sorrendben beszúrtuk egy M^2 méretű hash-táblába is, de most lineáris próbával, $M \cdot h(x) + 1$ hash-függvénnyel, ekkor t_2 ütközés történt. Igazolja, hogy $t_2 \leq t_1$.

7. Egy $n \times k$ méretű táblázatban van néhány megjelölt elem. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy minden lépésben a táblázat egy eleméről vagy a közvetlen felette vagy a tőle jobbra levő elemre mehetünk (ha van ilyen). Adjon $O(nk)$ idejű algoritmust, amely a megjelölt elemek helyét ismerve meghatározza, hogy egy ilyen út során maximálisan hány alkalommal tudunk megjelölt elemre lépni!

8. A húsvéti nyúl belefáradt, hogy mindenki ajándékot vár tőle. Ezentúl úgy jár el, hogy az első helyen, ahova odamegy nem ad ajándékot, a második helyen ad ajándékot, a következőn megint nem ad, és így tovább. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű irányított gráf, ami azt mutatja, hogy az x csúcsnak megfelelő helyről a nyúl következő lépése mely y csúcsokba vihet, az él súlya jelzi az átjutáshoz szükséges időt. Tegyük fel, hogy mátrixával adott a gráf, tudjuk, hogy a nyúl az $f \in V$ fészkéből indul, a mi helyzetünket az $m \in V$ csúcs jelzi. Adjon $O(|V|^3)$ idejű algoritmust, amellyel meghatározhatjuk, hogy mi az a legkorábbi időpont, amikor a nyúl ajándékosztó kedvvel érhet hozzánk! (A nyúl útja során egy csúcsot többször is meglátogathat és nem kell minden csúcsba eljutnia.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. május 27.

1. Definiálja a bináris keresőfát (a műveleteit is sorolja fel)! Írja le részletesen a TÖRÖL eljárást!

2. Írja le az egy pontból számított legrövidebb utak meghatározására való Bellman-Ford-algoritmust és magyarázza meg, miért helyes az algoritmus! Mátrixos megadás esetén mennyi a lépésszáma? (Ezt nem kell indokolni.)

3. Írja le a LÁDAPAKOLÁS problémára szolgáló First Fit algoritmust! Igazolja hogy ez egy 2-közelítő eljárás!

---

4. Tudjuk, hogy az $f(n)$ függvényre $f(1) = f(2) = 1$ és minden $n > 2$ esetben $f(n) = 3f(n-2) + 2n$. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(n^2)$, illetve, hogy $f(n) = \Omega(2^{n/2})$?

5. Tudjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lista egy csupa pozitív elemű rendezett listából úgy keletkezett, hogy annak minden elemét vagy 2-vel vagy (-2)-vel szoroztuk. Adjon algoritmust, ami az a_i listát $O(n)$ lépésben rendezi!

6. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő, súlyozott gráf az éllistájával valamint egy $f \in E$ él. Tegyük fel, hogy a gráfban minden él súlya különböző. Adjon $O(|V|+|E|)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e olyan minimális feszítőfa G-ben, amely tartalmazza az f élet!

7. Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

8. Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

   Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. június 3.

1. Írja le az összefésülés és összefésüléses rendezés algoritmusát! Melyiknek mennyi a lépésszáma és miért?

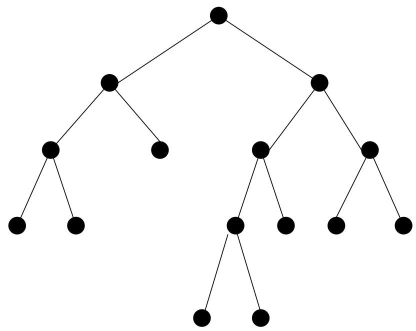
2. Írja le a minimális feszítőfákra használt piros és kék szabályt, valamint a piros-kék algoritmust! (A Prim- és Kruskal-algoritmust nem kell leírni!)

3. Definiálja a Karp-redukciót és igazolja, hogy ha $X \prec Y$ és $Y \in \mathrm{P}$, akkor $X \in \mathrm{P}$.

---

4. Tudjuk, hogy $f(n) = O(g(n))$. Ha $n > 1$, akkor legyen $h(n) = \sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} f(2i)$. Következik-e, hogy $h(n) = O(g(n))$, illetve, hogy $h(n) = \Omega(g(n))$?

5. A rajzon látható fában hányféleképpen lehet kijelölni, hogy melyik csúcs legyen piros és melyik fekete úgy, hogy ez megfeleljen egy piros-fekete fa színezésének?



6. Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:

   - S_i személy meghalt S_j születése előtt;
   - S_i személy élete során született S_j;
   - S_i személy korábban született, mint S_j;
   - S_i korábban halt meg, mint S_j.

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjon algoritmust, amivel k db fenti típusú válaszról $O(n + k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.

7. P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf és egy $k > 0$ egész szám. Kérdés, hogy van-e G-nek néhány összefüggő komponense, melyek pontszámainak összege éppen k.

8. Fogalmazza meg egész értékű programozási feladatként az alábbi problémát! Egy adott $G = (V, E)$ irányítatlan egyszerű gráfban keresünk olyan maximális méretű $D \subseteq V$ csúcshalmazt, melyre teljesül, hogy minden $x \in V$ csúcsnak legfeljebb 2 szomszédja van a D halmazban!

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2010. június 10.

1. Definiálja a 2-3 fákat (a műveletek felsorolásával együtt)! Mennyi lehet egy n elemet tároló 2-3 fa szintszáma és miért?

2. Írja le a mélységi bejárás algoritmusát és hogy hogyan lehet közben az éleket is osztályozni! Mennyi az algoritmus lépésszáma éllistás esetben? (Indokolni nem kell.)

3. Mit jelent az NP és hogy valami NP-teljes? Adja meg az alábbi problémák pontos definícióját: 3SZÍN, RH, X3C, és az egyikről magyarázza meg, miért van NP-ben!

---

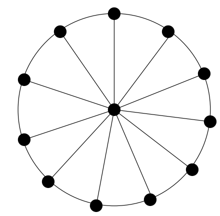
4. Az $f(n)$ függvényre minden $n > 1$ esetben $f(n) \le f(\lfloor n/2 \rfloor) + 3 \log n$ és $f(1) = 2$ teljesül. Következik-e ebből, hogy $f(n) = O(n)$, illetve, hogy $f(n) = O((\log n)^2)$?

5. Egy pozitív egész élsúlyokkal ellátott irányított gráfon a Dijkstra-algoritmust futtattuk az A csúcsból indítva. Az alábbi, kissé töredékes, táblázatunk van az eredményről. Milyen értékek szerepelhettek a táblázatban az x és y helyeken? Véget ért-e az algoritmus, és ha nem, adja meg a táblázat összes lehetséges folytatását!

A	B	C	D	E	F
0	∞	9	3	∞	10
0	15	8	3	x	6
0	14	7	3	5	6
0	10	y	3	5	6

6. Éllistájával adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf, melynek éleihez csupa különböző súlyt rendeltünk. A gráfot úgy akarjuk felosztani k darab $G_1 = (V_1, E_1)$, …, $G_k = (V_k, E_k)$ összefüggő részgráfra, hogy G minden csúcsa pontosan egy V_i-ben legyen benne. Egy ilyen felbontás értéke a különböző V_i csúcshalmazok között menő élek súlyai közül a legkisebb. Adjon $O(|E| \log |E|)$ lépésszámú algoritmust, mely adott G és k esetén meghatároz egy maximális értékű felosztást!

7. Keréknek hívjuk az olyan gráfokat, mint amilyen az ábrán látható (a példa egy 12 pontú kerék). Az X problémánál adott egy irányítatlan G gráf és egy $k > 0$ egész szám, kérdés, hogy részgráfként van-e a G-ben egy legalább k pontú kerék? Igaz-e, hogy $X \prec H$, illetve $H \prec X$ (ahol H a Hamilton-kör problémát jelöli)?



8. Adott egy egyszerű irányítatlan gráf, az élein pozitív egész súlyokkal. A gráfban egy párosítás súlya a benne levő élek súlyainak összege. Olyan párosítást keresünk a gráfban, amelynek a súlya maximális (az nem számít, hány élből áll, csak a súlya az érdekes). Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi

2010. június 17.

1. Írja le, hogy a nyitott címzésű hash-elésnél hogyan működik a KERES eljárás, ha lineáris, illetve ha kvadratikus próbát használunk!

2. Igazolja, hogy a Prim-algoritmus egy piros-kék algoritmus! Mennyi az algoritmus lépésszáma mátrixos, illetve éllistás esetben? (A lépésszámokat nem kell indokolni.)

3. Írja le az NP és NP-teljesség definícióját! Adja meg az alábbi problémák pontos definícióját: MAXFTL, RH, 3DH, és az egyikről magyarázza meg, miért van NP-ben!

---

4. Tudjuk, hogy az $f(n)$ függvényre $f(1) = 3$, valamint minden $n > 1$ esetben $f(n) = 2 \cdot f(\lfloor n/2 \rfloor) + 5n$. Következik-e ebből, hogy
   (a) $f(n) = O(n^2)$?
   (b) $f(n) = O(n \log n)$?

5. Adott az n elemű $A[1] \le A[2] \le \ldots \le A[n]$ tömb. Hogyan lehet $O(\log n)$ lépésben meghatározni, hogy az n közül hány elemnek az értéke egyezik meg az $A[1]$ értékkel?

6. A $G = (V, E)$ összefüggő, irányítatlan súlyozott gráfban $|E| \le |V| + 100$. Adjon $O(|V|)$ lépésszámú algoritmust egy minimális feszítőfa meghatározására!

7. Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben egy legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?

8. Adott egy $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráf. Egy olyan $W \subseteq V$ halmazt keresünk, amely a lehető legtöbb csúcsból áll és teljesül rá, hogy a gráfban bármely 2 független él 4 végpontjából W legfeljebb 2 pontot tartalmaz.

   Hogyan lehet ezt a problémát egészértékű programozási feladatként felírni? (A kapott EP feladatot nem kell megoldani!)
