Algoritmuselmélet zárthelyi dolgozat
2002. április 8.

1. Egy n méretű hash táblába lineáris próbával szúrjuk be az $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ elemeket. Az első k elem ($2 \leq k < n$) beszúrása során összesen $\binom{k}{2}$ ütközés történt. Legrosszabb esetben hány ütközés lesz a_{k+1} beszúrásakor?
2. Az $1, 1, 2, 2, 4, 7, 5, 2$ sorozat egy a és b karakterekből álló szó Lempel-Ziw-Welch kódolása. A szótár kezdetben az $a \to 1$ és $b \to 2$ bejegyzéseket tartalmazza. Mi volt az eredeti szó?
3. A $k_1, k_2, \ldots, k_n$ egészekből AVL-fát építünk a szokásos algoritmussal. (Mindig beszúrjuk a sorban követzőt és szükség esetén forgatunk.) Bizonyítsuk be, hogy legalább $O(\log_2 n)$ elem beszúrásakor nincs szükség forgatásra!
4. Egy $n \times n$-es sakktábla néhány mezőjén az ellenfél egy huszárja (lova) áll. Ha mi olyan mezőre lépünk, ahol az ellenfél le tud ütni, akkor le is üt, de egyébként az ellenfél nem lép. Valamelyik mezőn viszont a mi huszárunk áll. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy mely másik mezőkre tudunk (lólépések sorozatával) eljutni a nélkül, hogy az ellenfél leütne!
5. Adottak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ különböző egész számok. Ezeket szeretnénk nagyság szerint rendezni növekvő, vagy csökkenő sorrendbe úgy, hogy a szokásos összehasonlítás helyett, most a következő kérdéseket lehet feltenni: *Három kiválasztott elem közül melyik a középső?* Bizonyítsuk be, hogy a leghatékonyabb algoritmus $\Theta(n \log_2 n)$ összehasonlítást használ!
6. Az $A_0, A_1, \ldots, A_n$ játékosok tollaslabda bajnokságon vesznek részt, amely során minden játékos minden másik játékossal k-szor játszik. Minden mérkőzésen a győztes 1, a vesztes 0 pontot kap (döntetlen nincs). A bajnokság győztese, aki a végén a legtöbb pontot gyűjtötte. Most éppen a bajnokság közepén járunk, jó néhány meccset lejátszottak már (nem feltétlenül egész fordulókat), ezek eredményét ismerjük, de még sok mérkőzés hátra van. *Adjunk olyan $O(n^6)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy A_0 megnyerheti-e még a bajnokságot (nem holtversenyben, hanem egyedül)!*

Algoritmuselmélet vizsga zárthelyi dolgozat
2002. május 28.

1. Add meg Kruskal módszerét minimális összsúlyú feszítőfa keresésére! Mennyi a futásideje? (Bizonyítani nem kell a módszer helyességét.)
2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{R} = co\mathcal{R}$! ($\mathcal{R}$ a rekurzív nyelvek osztálya, $co\mathcal{R}$ pedig ennek komplementer nyelvztálya.)
3. Készíts AVL-fát a $6, 2, 3, 5, 7, 9, 4$ számokból a tanult módszerrel. Minden beszúrás után add meg a keletkező AVL-fát!
4. Adj $O(n^4)$ futási idejű algoritmust, amely egy adott n pontú irányítatlan, nemnegatív élsúlyokkal ellátott gráfban megtalálja a legrövidebb összhosszúságú kört (ami egy ponton nem mehet át kétszer).
5. Adj $O(n^{k-1} \log n)$ összehasonlítást használó algorimust, ami eldönti, hogy az adott különböző $x_1, x_2, \ldots, x_n$ racionális számok közül kiválasztható-e pontosan k darab úgy, hogy az összegük éppen S legyen!
6. Bizonyítsd be, hogy az X4C nyelv NP-teljes!
   X4C (*Pontos fedés négyesekkel***) definíciója:** adott egy U véges halmaz, és U négyelemű részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja. Eldöntendő, hogy az $\mathcal{F}$-ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U-t. Jelölje X4C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre az $\mathcal{F}$-ből kiválasztható U ilyen értelemben vett pontos fedése.

Algoritmuselmélet vizsga zárthelyi dolgozat
2002. június 11.

1. Ismertesd a kupac adatszerkezetet és a kupacba való beszúrás algoritmusát. Utóbbinak mennyi a maximális lépésszáma? (Itt semmit nem kell bizonyítani.)

2. Bizonyítsd be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in$ P, akkor $L_1 \in$ P.

3. Egy bináris fa inorder bejárása:
$$j, b, k, g, i, a, c, d, f, e, h$$
preorder bejárása:
$$a, b, j, g, k, i, d, c, e, f, h.$$
Rekonstruáld a fát!

4. Adott $2n$ különböző racionális szám. Adj $O(n \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ párokba sorolja a számokat úgy, hogy
$$\max_{1 \leq i \leq n} (x_i + y_i)$$
a lehető legkisebb legyen!

5. Adott egy n pontú e élű egyszerű, összefüggő gráf, valamint egy $k \geq 2$ egész szám. Olyan feszített részgráfot keresünk G-ben, melyben minden pontjának foka legalább k. Adj $O(n^2)$ futásidejű algoritmust, ami megadja G-ben a legtöbb pontot tartalmazó ilyen feszített részgráfot, ha van ilyen, illetve, megmondja, hogy ha nincs ilyen.

6. Legyen az NE nyelv a következő:
$$NE = \{(x, y) \mid x, y \text{ Turing gépek kódjai, } L(M_x) \neq L(M_y)\},$$
ahol $L(M_z)$ az z szóval leírt Turing gép által felismert nyelvet jelöli. Bizonyítsd be, hogy NE nem rekurzíve felsorolható nyelv.

Algoritmuselmélet vizsga zárthelyi dolgozat
2002. június 25.

1. Definiáld az AVL-fa fogalmát! Mennyi egy n elemet tartalmazó AVL-fában egy keresés időigénye legrosszabb esetben? (Itt semmit nem kell bizonyítani.)

2. Bizonyítsd be, hogy az L_h megállási probléma nyelve nem rekurzív! (Felhasználható, hogy az L_u univerzális nyelv nem rekurzív.)

3. Nyitott címzéssel hasheltünk egy 11 elemű táblába a $h(k) = k \pmod{11}$ hash-függvény és kvadratikus maradék próba segítségével. A következő kulcsok érkeztek (a megadott sorrendben): $6, 5, 7, 17, 16, 3, 2, 14$. Add meg a tábla végső állapotát!

4. Adott egy n pontú e élű egyszerű, összefüggő, irányítatlan gráf. Adj $O(n + e)$ futásidejű algoritmust, ami megtalál egy olyan pontot, ami nem artikulációs pont! (Egy pont *artikulációs pont*, ha elhagyásával a gráf több komponensre esik szét.)

5. Adott egy $n \times n$-es mátrix. Adj $O(n^2 \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely eldönti, van-e két olyan sor, amelyeknek az első oszlopbeli elemei különböznek, viszont az összes többi oszlopban megegyeznek!

6. *Definiáljuk a H2C problémát:* Adott egy U véges halmaz, és U részhalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ családja. Eldöntendő, hogy kiszínezhetők-e U pontjai 2 színnel úgy, hogy minden X_i halmazban szerepeljen mindkét szín. (Minden pont csak egy színt kaphat.) Jelölje H2C azokat az $(U, \mathcal{F})$ párokat, melyekre van ilyen színezés.

   Bizonyítsd be, hogy H2C NP-teljes.

Algoritmusok elmélet zárthelyi
2003. március 31.

1. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$.
   a) Dijkstra módszerével határozza meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de látszódjon, lépésenként hogyan változik a távolságokat tároló D tömb és a KÉSZ halmaz.)
   b) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük. Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az a-tól mért távolságok?

2. Egy 2-3 fába egymás után 1000 új elemet illesztettünk be. Mutassa meg, hogy ha ennek során egyszer sem kellett csúcsot szétvágni, akkor a beillesztések sorozata előtt már legalább 2000 elemet tároltunk a fában.

3. Egy n csúcsú irányított gráf mélységi bejárása során azt tapasztaltuk, hogy minden csúcsra a befejezési és a mélységi szám különbsége kisebb mint $n/4$. Igazoljuk, hogy a gráf erősen összefüggő komponenseinek száma legalább 4.

4. Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
   BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
   TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
   MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
   DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
   ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
   Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha m-*féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$. (Például ha a tárolt elemek 1,1,3,3,3,8, akkor DARAB(1)=2, ELEM(4)=3 és m =3.)

5. Egy n hosszú 0-1 sorozatot olyan, legalább 4 hosszú darabokra kell szétvágni, hogy minden keletkezett részben az első két bit megegyezzen az utolsó két bittel. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely eldönti, hogy van-e ilyen szétvágás.

6. A $G(V, E)$ irányított gráf minden éle az $1, 2, \ldots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak *maximuma*. Határozza meg, hogy ha adott két csúcs $x, y \in V$, akkor mennyi a lehető legkisebb értékű x-ből y-ba vezető út értéke. Ha G éllistával adott és e éle van, akkor a lépésszám legyen $O(e \log k)$.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2003. május 30.

1. Ismertesse a kupac adatszerkezetet (a hozzá tartozó műveletekkel együtt). Írja le a MINTÖR algoritmusát és adja meg a lépésszámát. (Bizonyítani nem kell.)

2. Definiálja az L_d diagonális nyelvet és mutassa meg, hogy L_d nem rekurzíve felsorolható.

3. Igazolja, hogy ha coNP $\neq$ NP, akkor MAXKLIKK $\notin$ P.

4. Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!\,(e + n))$.

5. Van egy nullákkal és egyesekkel kitöltött n sorból és n oszlopból álló mátrixunk. Át szeretnénk úgy rendezni, hogy a főátlóban csupa egyes álljon (a többi helyre nincs megkötés). Az átrendezés kétféle lépést használhat: vagy két sort cserél meg vagy két oszlopot. Adjon polinom idejű algoritmust, ami eldönti, hogy megvalósítható-e a kívánt átrendezés.

6. Adott összesen $2n$ különböző szám két n elemű halmazban, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Azt szeretnénk eldönteni minimális számú összehasonlítással, hogy a $2n$ szám közül a legnagyobb az A vagy a B halmazban van-e. (Azaz nem kell feltétlenül meghatározni, melyik elem a legnagyobb, csak azt, hogy melyik halmazba tartozik.) Mutassa meg, hogy ehhez a feladathoz is legalább annyi összehasonlítás kell, amennyi $2n$ elem közül a maximális meghatározásához szükséges.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2003. június.6.

1. Ismertesse Dijkstra legrövidebb utakat kereső algoritmusát arra az esetre, amikor a gráf a mátrixával adott. Mennyi az algoritmus lépésszáma? (Az algoritmus helyességét nem kell igazolni, de a lépésszámot röviden indokolja.)

2. Írja le a Karp-redukció definícióját és adja meg a 3SZÍN $\prec$ MAXFTL Karp-redukciót (indoklás nem kell).

3. Igaz-e, hogy minden L_1 rekurzíve felsorolható és minden $L_2 \in P$ nyelv esetén teljesül, hogy
(a) $L_1 \cap L_2$ rekurzíve felsorolható?
(b) $L_1 \cap L_2$ rekurzív?
(c) $L_1 \cap L_2 \in P$?

4. A $b_0 ... b_n$ alakú $n+1$ hosszú bitsorozatokat akarjuk tárolni. Tudjuk, hogy a b_0 paritásbit, ami a sorozatban az egyesek számát párosra egészíti ki. Ha nyitott címzésű hash-elést használunk $h(x) \equiv x \pmod M$ hash-függvénnyel és lineáris próbával, akkor $M = 2^n$ vagy $M = 2^n + 1$ méretű hash-tábla esetén lesz kevesebb ütközés?

5. Mátrixával adott egy $G(V,E)$ irányított gráf, melynek minden éléhez egy pozitív súly tartozik. A gráf minden csúcsa vagy egy raktárat vagy egy boltot jelképez, az élsúlyok a megfelelő távolságokat jelentik. Olyan G' részgráfját keressük G-nek, amely minden csúcsot tartalmaz, és amelyben minden bolthoz van legalább egy raktár, ahonnan oda tudunk szállítani (azaz van köztük út a gráfban). Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust egy a feltételeknek megfelelő minimális összsúlyú G' részgráf megkeresésére.

6. A ládapakolás feladatban tudjuk hogy az érkező tárgyak mérete kisebb mint $1/k$, ahol $k \geq 3$ egész szám. Adjon polinom idejű algoritmust, ami legfeljebb $\frac{k}{k-1}\,\mathrm{OPT}+1$ darab ládát használ, amikor a legjobb pakolás OPT darab ládát igényel.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2003. június 13.

1. Ismertesse az AVL-fa adatszerkezetet (a hozzátartozó műveletekkel együtt). Mekkora egy AVL-fa mélysége, mennyi az egyes műveletek lépésszáma? (Bizonyítani nem kell)

2. Definiálja a rekurzíve felsorolható és a rekurzív nyelvek osztályát. Adjon meg olyan nyelvet, ami
(a) mindkettőbe beletartozik
(b) csak az egyikbe tartozik (melyikbe?)
(c) egyikbe sem tartozik.
(Bizonyítani nem kell.)

3. Legyen $L \subseteq I^*$ egy NP-teljes nyelv és jelölje $\overline{L} = I^* - L$ az L nyelv komplementerét. Mutassa meg, hogy minden $L' \in co\,NP$ nyelvhez létezik $L' \prec \overline{L}$ Karp-redukció.

4. Valaki a következő eljárást javasolta minimális feszítőfa keresésére. A G gráf éleit tetszőleges sorrendben megszámozzuk, legyen ez $e_1, e_2, \ldots, e_m$. Kezdetben $T = \emptyset$. Az i. lépésben $(i = 1, 2, \ldots, m)$ a T halmazhoz vegyük hozzá az e_i élet. Ha T-ben van kör, akkor hagyjuk el T-ből a kör egyik legnagyobb súlyú élét.
Igaz-e, hogy ha a G összefüggő gráf, akkor az m-edik lépés után a T-ben levő élek G egy minimális feszítőfáját alkotják?

5. P-beli vagy NP-teljes az alábbi L nyelv?
$L = \{G(V,E)$ egyszerű gráf, G csúcsai kiszínezhetők $|V| - 4$ színnel$\}$.

6. A G irányított gráf csúcshalmaza legyen $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. A gráf egy olyan éllistával adott, amiben az egyes csúcsokhoz tartozó élek tetszőleges sorrendben lehetnek. Lineáris időben készítsük el ebből azt az éllistáját G-nek, amiben minden csúcs listája rendezett (tehát az adott csúcsból éllel elérhető pontok növekvő sorrendben követik egymást).

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2003. június 20.

1. Írja le az összefésülés és az összefésüléses rendezés eljárását. Mennyi az eljárásokban használt összehasonlítások száma? (Indokolni is kell.)

2. Definiálja az L_u univerzális és az L_h megállási nyelvet és adja meg, hogy melyik milyen nyelvosztályba tartozik (bizonyítás nem kell).

3. Rekurzív-e az $L_1 \cap L_2$ nyelv, ha $L_1 \in TIME(n)$ és $L_2 \in SPACE(2^n)$?

4. Egy kupacban definiálhatjuk a FOGYASZT és NÖVEL műveleteket, melyek közül az első az adott helyen levő kulcsot kisebbre, a második pedig nagyobbra cseréli és a változtatás után mindkettő helyreállítja a kupactulajdonságot.
(a) Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust mindkét műveletre.
(A változtatandó kulcs helyét tudjuk, nem kell a kupacban keresni.)
(b) Módosítsa az eljárásokat bináris kupacról d-kupacra. Jelölje $f(n)$ a FOGYASZT és $g(n)$ a NÖVEL lépésszámát n elemű d-kupac esetén, ha $d = \sqrt{n}$. Igaz-e, hogy $g(n) = O(f(n))$?

5. P-beli vagy NP-teljes az alábbi L nyelv?
$L = \{G$ gráf : csúcsai 3 színnel kiszínezhetők úgy, hogy mindhárom színosztályba ugyanannyi csúcs tartozzon $\}$.

6. Nyári utazásunkra valutát akarunk váltani. A pénzváltó n különböző valutával foglalkozik, a j. fajta 1 egységéért r_{ij}-t kell fizetni az i. pénznemben. (Pl. ha a j. a dollár, az i. a forint, akkor most $r_{ij} = 222$ lehet.) Az r_{ij} tömb felhasználásával adjon $O(n^3)$ lépéses algoritmust, amely minden valutapárra meghatározza, hogy mi az elérhető legjobb átváltási arány, ha feltesszük, hogy az átváltásokért nem számolnak fel külön költséget. (Az i-ről a j-re való átváltás történhet több lépcsőben is, érdemes lehet előbb i-ről k_1-re konvertálni, onnan k_2-re, stb és végül j-re.)

Algoritmuselmélet zárthelyi
2004. március 29.

1. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következőek: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$, $s(e, d) = 3$, $s(f, d) = 1$, $s(f, e) = 1$.
a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg a-ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
b) Vegyük hozzá a gráfhoz az (b, d) élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?

2. Az $A[1 \ldots n]$ tömbben egész számokat tárolunk, ugyanaz a szám többször is szerepelhet. Határozzuk meg $O(n \log n)$ lépésben az összes olyan számot, amelyik egynél többször fordul elő a tömbben.

3. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy KERES(x) hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha nem lehetséges, indokolja meg miért nem, ha pedig lehetséges, határozza meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet.

4. Egy szigeten nyíló pizzaszállító cég triatlont kedvelő főnöke kiköti, hogy minden házhozszállításnál az út első részét úszva kell megtenni, a következőt biciklivel, majd a végét futva. Azt azért megengedi, hogy egy vagy akár több szakasz is kimaradjon (pl. úszás után rögtön futás következzen, vagy az egész út egyféle legyen, például csak biciklizésből álljon), de a közlekedési módok sorrendjét nem szabad felcserélni. (A főnök arról gondoskodik, hogy ahol lehet biciklizni, ott legyen is mivel.) A várost egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf írja le, a gráf p csúcsa jelöli a pizzázót. A gráf éllistájával van megadva, az éllistában minden élnél szerepel, hogy ott mely közlekedési formák megengedettek, egyszerre akár több is. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, hogy a pizzázóból a város mely pontjaira tud a cég a szabályok betartásával szállítani.

5. Egy kezdetben üres 2-3-fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.

6. A mátrixával adott irányítatlan $G(V, E)$ gráf egy város úthálózatát reprezentálja. A gráf bizonyos csúcsaiban parkoló van, minden parkolóhoz adott az ottani parkolás költsége. Egy parkoló a városrendezés szerint felesleges, ha a parkolótól legfeljebb k utcányira (azaz legfeljebb k éllel elérhetően) van nála olcsóbb parkoló. Adjon $O(k|V|^2)$ idejű algoritmust, ami eldönti, hogy van-e felesleges parkoló a városban.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2004. május 27.

1. Írja le Prim algoritmusát s magyarázza meg, hogy ez miért speciális esete a piros-kék algoritmusnak.
   Adja meg a Prim-algoritmus lépésszámát éllistás, kupacos megvalósítás esetén (bizonyítani nem kell).

2. (a) Definiálja az L_u univerzális nyelvet.
   (b) Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $L_u \in \mathrm{R}$.
   (c) Bizonyítsa vagy cáfolja, hogy $L_u \in \mathrm{RE}$.

3. Legyen $L_1 \in \mathrm{SPACE}(n)$ és $L_2 \in \mathrm{TIME}(n^{10})$. Igaz-e, hogy $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{EXPTIME}$?

4. AVL-fákban valósítsa meg az alábbi KÖVETKEZŐ(x) eljárást. Az eljárásnak a legkisebb olyan fában szereplő kulcsot kell megadnia, amely nagyobb mint x, feltéve, hogy az x kulcs szerepel a fában. Ha az AVL-fának n csúcsa van, akkor az eljárás lépésszáma legyen $O(\log n)$.

5. Igazolja, hogy ha egy L nyelv NP-teljes és $L \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{co\,NP}$, akkor $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$.

6. A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2004. június 3.

1. Írja le a nyitott címzésű hashelés módszerét, a műveletek megvalósítását lineáris próba és kvadratikus maradék próba esetén. (A jó hash-függvényekre nem kell kitérni.)

2. (a) Definiálja a $\mathrm{SPACE}(f(n))$ és $\mathrm{TIME}(g(n))$ osztályokat.
   (b) Igazolja vagy cáfolja, hogy $\mathrm{TIME}(g(n)) = \mathrm{co\,TIME}(g(n))$
   (c) Igazolja vagy cáfolja, hogy $\mathrm{SPACE}(f(n)) = \mathrm{co\,SPACE}(f(n))$

3. A $2^k - 1$ elemű A tömb elemei mind különbözőek és növekvő sorrendben vannak. Minden elemet egy k hosszú bitsorozat ír le, tehát tekinthetjük úgy, hogy a $0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ számokat tároljuk egy kivételével. A feladat ennek a hiányzó számnak a megkeresése. Ehhez egy lépésben valamelyik elem egy bitjére kérdezhetünk rá: a $\mathrm{BIT}(i, j)$ eljárás az $A[i]$ elem j-edik bitjét mondja meg. Adjon olyan algoritmust, amely a BIT eljárás $O(k)$-szori hívásával megtalálja a hiányzó számot (bitsorozatot).

4. P-beli vagy NP-teljes az alábbi nyelv: $L = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{Z}$ és a számok három részre oszthatóak úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen $\}$

5. Rekurzív-e az alábbi L nyelv?
   $L = \{x\#y :$ létezik az x kódú M_x és az y kódú M_y Turing-gép, $L(M_x) \cap L(M_y) = \emptyset\}$

6. Az éllistával adott G egyszerű irányítatlan gráfról el akarjuk dönteni, hogy van-e olyan éle, amely G minden körében benne van. Adjon olyan algoritmust, amely ezt $O(n)$ lépésben megoldja (ahol n a G gráf csúcsainak számát jelöli).

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2004. június 10.

1. Ismertesse a (bináris) kupac adatszerkezetet és a BESZÚR, MINTÖR eljárások algoritmusát.
   Mennyi ezeknek az eljárásoknak a lépésszáma (bizonyítani nem kell)?

2. Definiálja az L_h megállási nyelvet. Az EXPTIME, R, RE nyelvosztályok közül az L_h nyelv melyikben van benne és melyikben nincs? Az egyes válaszokat indokolja is!

3. Legyen $L = \{x\#n \mid C(x) \leq n\}$, ahol x egy $\{0,1\}$ feletti szó, n egy binárisan ábrázolt pozitív egész szám, $C(x)$ pedig az x szó Kolmogorov-bonyolultságát jelöli. Helyes-e a következő érvelés?
„Mivel egy legfeljebb n hosszú y szó tanúsítja, hogy $C(x) \leq n$, ezért az L nyelv NP-ben van".

4. Az n méretű (nem feltétlenül rendezett) A tömb elemei különböző pozitív egész számok. Adjon algoritmust, amely meghatároz egy $1 \leq k \leq n$ számot és kiválaszt k különböző elemet az A tömbből úgy, hogy a kiválasztott elemek összege nem több mint k^3. Ha nincs ilyen k, akkor az algoritmus jelezze ezt a tényt. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \log n)$. (Két szám összehasonlítása, összeadása vagy szorzása egy lépésnek számít.)

5. Jelölje H a Hamilton-körrel rendelkező irányítatlan gráfok nyelvét, 2KÖR pedig az olyan irányítatlan gráfokét, melyeknek csúcsai lefedhetőek két darab, közös pontot nem tartalmazó körrel. Igazolja, hogy létezik
(a) H $\prec$ 2KÖR Karp-redukció
(b) 2KÖR $\prec$ H Karp-redukció.

6. A $G(V,E)$ egyszerű összefüggő gráf minden f éléhez egy $s(f)$ súlyt rendeltünk. Legyen F_1 és F_2 a G gráf két különböző, minimális súlyú feszítőfája. Jelölje f_1 az F_1 fa egy tetszőleges élét. Bizonyítsa be, hogy van az F_2 fának olyan f_2 éle, hogy $s(f_1) = s(f_2)$.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2004. június 17.

1. Írja le a radix rendezés algoritmusát és igazolja az algoritmus helyességét. Mennyi az algoritmus lépésszáma?

2. (a) Definiálja az R, co R, RE, co RE nyelvosztályokat.
(b) Igazolja, vagy cáfolja, hogy R = RE $\cap$ co RE.

3. Igazolja, hogy ha az L_1 és L_2 nyelvekre fennáll, hogy $L_1 \in$ NP és $L_2 \in$ NP, akkor $L_1 \cap L_2 \in$ NP.

4. P-beli vagy NP-teljes az olyan 4 színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, hogy G csúcsai kiszínezhetőek a piros, kék, zöld, sárga színekkel úgy is, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs kék?

5. A kezdetben üres kupacba egyenként szúrunk be n elemet. Igazolja, hogy előfordulhat, hogy a beszúrások során végzett összehasonlítások száma $\Omega(n \log n)$.

6. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges egész számok és $m < n^2$ egész. Adjon algoritmust, amely a bináris alakjukkal megadott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és m számokról eldönti polinom időben, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül kiválasztható-e néhány úgy, hogy az összegük m-mel osztva egyet adjon maradékul.

Algoritmuselmélet zárthelyi
2005. április 8.

1. Egy kezdetben üres AVL-fába a tanult algoritmussal egyenként szúrja be a 7,4,3,9,5,6,2,1,8 kulcsokat, majd törölje az 5-ös kulcsot. (Minden lépés eredményét rajzolja le!)

2. Egy m méretű hash-táblában már van néhány elem. Adjon $O(m)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy egy újabb elem lineáris próbával történő beszúrásakor maximum hány ütközés történhet.

3. Az $A[1:n]$ tömbben levő elemekről tudjuk, hogy $A[1] \neq A[n]$. Adjon $O(\log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely talál egy olyan i indexet, hogy $A[i] \neq A[i+1]$.

4. Egy gyökeres szintezett fán A és B a következő játékot játssza: felváltva mozgatnak egy bábut ami kezdetben az első szinten, a gyökérben van. Minden lépésben a soron következő játékos az aktuális v csúcsból v valamelyik fiába mozgatja a bábut. A játéknak akkor van vége, ha a bábu a fa egyik levelébe kerül. A levelek egy része zöldre van festve. A kezdő A játékos akkor nyer, ha a játék egy zöld levélben ér véget.

   Adott a fa éllistája, és egy tömb, ami a fa minden pontjára megmondja, hogy az zöld-e. Mutasson egy $O(n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy az A játékos hogyan játszon, hogy biztosan nyerjen (feltéve, hogy van ilyen nyerő stratégiája).

5. Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.

6. Egy n pontú teljes gráf csúcsait kell kiszíneznünk csupa különböző színűre. Összesen $k \geq n$ féle szín áll rendelkezésre, de az egyes pontok színe nem teljesen tetszőleges. Minden v csúcshoz adott színeknek egy $S(v)$ listája, a v csúcsot csak az $S(v)$-ben szereplő színek valamelyikére színezhetjük. Adjon $O(nk^2)$ lépésszámú algoritmust, amely az $S(v)$ listák alapján eldönti, hogy van-e a megkötéseknek megfelelő színezés, és ha van ilyen, talál is egyet.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2005. május 26.

1. Ismertesse az összefésüléses rendezést (és az ehhez szükséges összefésülés algoritmusát). Adja meg hogy ez a rendezés mennyi összehasonlítást használ (legrosszabb esteben). Állítását bizonyítsa is be.

2. Definiálja, hogy egy X nyelvosztálynak mi a coX komplementer nyelvosztálya. Igazolja, hogy ha $X \subseteq Y$, akkor $coX \subseteq coY$.

3. Bizonyítsa be, hogy van olyan k konstans, mellyel minden $x \in \{0,1\}^*$ szóra teljesül, hogy $|C(x) - C(xx)| < k$. (Itt $C(z)$ a z szó Kolmogorov-bonyolultságát jelöli.)

4. Mutassa meg, hogy az alábbi L nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
$L = \{(G, a, b) : a, b > 0$ egészek, a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja$\}$

5. A kezdetben üres M méretű hash-táblába sorban beraktuk a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ kulcsokat a $h(x) \equiv x(\text{mod } M)$ hash-függvénnyel, lineáris próbával. Jelölje t_1 a keletkezett táblában az egymás melletti foglalt mezők maximális számát. Amikor ugyanezt a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sorozatot ugyanabban a sorrendben egy üres $2M$ méretű táblába rakjuk be a $h(x) \equiv x(\text{mod } 2M)$ hash-függvénnyel, lineáris próbával, akkor a kepott táblában legyen t_2 az egymás melletti foglalt mezők maximális száma.
(a) Igazolja, hogy $t_2 \leq t_1$
(b) Igaz-e, hogy $t_1 \leq 2t_2$?

6. Éllistával adott az n pontú $G(V, E)$ gráf, melynek minden e éle egy $c(e) > 0$ élsúllyal van ellátva. Egy adott $s \in V$ csúcsból akarunk egy adott $t \in V$ csúcsba eljutni a legolcsóbb módon, de az út költségét a szokásostól eltérően számoljuk: ha az e él az út s-től számított k-adik éle, akkor $k \cdot c(e)$ költséggel járul hozzá az út költségéhez. Adjon algoritmust, ami az ilyen értelemben vett legolcsóbb út költségét $O((n(n + |E|) \log n)$ lépésben.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2005. június 9.

1. Ismertesse a bináris keresőfa adatszerkezetet. Írja le a keresés, a beszúrás és a törlés algoritmusát. Maximálisan mennyi lehet ezek lépésszáma? Válaszát indokolja is meg.

2. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Floyd-algoritmust. Adja meg az algotimus lépésszámát.

3. Igazolja, hogy ha $L_1 \in \text{NP}$ és $L_2 \in SPACE(n^2)$, akkor $L_1 \cup L_2 \in EXPTIME$.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi L nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
$L = \{G(V, E) : G$ egyszerű gráf, $|E| \leq 2|V|$, a G gráf színezhető 3 színnel $\}$.

5. Legyen G egy összefüggő gráf, az élein pozitív élsúlyokkal. A G gráfnak most csak az olyan feszítőfák érdekelnek minket, melyekben legfeljebb 3 darab nem elsőfokú pont van. Adjon polinom idejű algoritmust, amely meghatároz az ilyen tulajdonságú feszítőfák közül egy minimális súlyút.

6. Legyen $I = \{0,1\}$ és $L \subseteq \{x\#y : x, y \in I^*\}$ egy tetszőleges nyelv. Minden $w \in I^*$ szóhoz definiáljuk az $L_w = \{x : x\#w \in L\}$ nyelvet. (Az L_w nyelv lehet üres is.) Igazolja, hogy
(a) ha L rekurzív, akkor mindegyik L_w nyelv rekurzív;
(b) van olyan nem rekurzív L nyelv, hogy mindegyik L_w nyelv rekurzív.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2005. június 16.

1. Írja le az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet és a fákkal való implementációját (útösszenyomás nélkül) Mennyi a műveletek lépesszáma? (Bizonyítani nem kell.)

2. (a) Definiálja a TIME($f(n)$) és SPACE($g(n)$) nyelvosztályokat.
(b) Bizonyítsa be, hogy $\mathrm{TIME}(f(n)) = \mathrm{co\,TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$.

3. Igazolja, hogy a $\mathrm{TP} = \{G : G$ páros gráf, van benne teljes párosítás$\}$ nyelv és a Hamilton-körrel rendelkező gráfok H nyelve között van TP $\prec$ H Karp-redukció.

4. Legyen $I = \{0,1\}$ és $L \subseteq I^*$ egy nyelv. Legyen $L^{(2)} = \{wxw : w \in L, x \in I^*\}$. Bizonyítsa be, hogy ha $L \in \mathrm{RE}$ akkor $L^{(2)} \in \mathrm{RE}$ is teljesül.

5. Mutassa meg, hogy a részhalmazösszeg nyelv alábbi változata P-beli
$L = \{(s_1, \ldots, s_n; b) : s_i, b$ egészek, $0 < s_i < n^2, 0 < b$ és $\exists I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ hogy $\sum_{i \in I} s_i = b\}$.

6. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Igazolja, hogy nincs olyan összehasonlítás alapú rendezés, mely a lehetséges $a_1, \ldots, a_n$ sorozatok több mint felénél $O(n)$ összehasonlítást használ.

Algoritmusok elmélete vizsgazárthelyi
2005. június 23.

1. Írja le a legrövidebb utak keresésére szolgáló Dijkstra-algoritmust. Mi az algoritmus alkalmazásának feltétele? Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha a gráf éllistával van megadva és a megvalósításában bináris kupacot használunk? (Az algoritmus helyességét és a lépésszámot nem kell indokolni.)

2. (a) Definiálja a diagonális nyelvet.
(b) Beletartozik-e a diagonális nyelv az R, illetve RE nyelvosztályokba? Állítását bizonyítsa is be.

3. Legyen M egy nemdeterminisztikus Turing-gép és álljon K_M azokból a w szavakból, melyekhez van az M gépnek olyan számítási ága, ami mentén M nem áll meg. Igazolja, hogy $K_M \in \mathrm{co\,RE}$.

4. Mutassa meg, hogy az alábbi L nyelv P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes:
$L = \{(G, k)$: a G gráfban minden pont fokszáma kisebb mint a pontok számának fele, és G-ben van k független pont$\}$.

5. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.

6. Minden nap több új megmunkálandó munkadarab érkezik a műhelybe, de naponta csak eggyel végeznek. Tegyük fel, hogy M napon át minden nap M újabb munkadarab érkezik. A munkadarabok meg vannak számozva 1-től M^2-ig, de tetszőleges sorrendben érkezhetnek. A műhelyben minden nap egy darabot, a felgyülemlett munkadarabok közül a legkisebb sorszámút csinálják meg. Jelölje A_i az i-edik nap érkező munkadarabok halmazát, $|A_i| = M$ és $A_1 \cup \ldots \cup A_M = \{1, \ldots, M^2\}$. Adjon algoritmust, amely az A_i halmazokból $O(M^2)$ lépésben meghatározza, hogy az M nap közül melyik nap melyik munkadarab fog elkészülni.

Algoritmuselmélet zárthelyi
2006. április 7.

1. Előfordulhat-e nyitott címzéses hash-elés esetén, hogy az $n > 3$ méretű táblában csak 3 elem van, de a keresés lépésszáma n ?

2. Adott n különböző elem, ezek közül keressük a kicsiket. A beszúrásos, az összefésüléses, illetve a kupacos rendezést a szokásos módon futtatva nagyságrendileg hány összehasonlítást végzünk, amíg megtudjuk, hogy melyik az első k darab legkisebb elem?

3. Legyen G egy irányítatlan összefüggő gráf. Igaz-e, hogy
(a) G minden f éléhez van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben f egy faél?
(b) G minden f éléhez van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben f egy faél?
(c) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan mélységi bejárása, amelyben F minden éle faél?
(d) G minden F feszítőfájához van G-nek olyan szélességi bejárása, amelyben F minden éle faél?

4. Adott egy kupac, mely n darab számot tartalmaz. Egy új kupacot szeretnénk építeni az eredeti kupac elemeinek (-1)-szereseiből. (Ehhez, ha akarjuk, használhatjuk az eredeti kupacot.) Mutassa meg, hogy az új kupac elkészítéséhez használt összehasonlítások száma $\Theta(n)$.

5. Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(ke \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A-ból B-be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autóznunk két benzinkút között.

6. Egy n szóból álló szöveget kell sorokra tördelni. A szöveg i-edik szava ℓ_i karakterből áll, egy sor s karakter hosszú. Ha egy sor a szöveg i-edik szavával kezdődik és a j-edik szóval végződik, akkor az elválasztó szóközöket is figyelembe véve $t = s - (\ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_j + j - i)$ üres hely marad a sor végén. Egy ilyen sor hibája legyen t^2. A tördelés hibája a nem üres sorok hibáinak összege. Adjon $O(n^2)$ lépéses algoritmust egy legkisebb hibájú tördelés meghatározására! (A szavak sorrendje rögzített.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2006. május 29.

Megoldásait mindig indokolja meg (kivétel ez alól az 1. feladat (c) része). A 3., 4., 5. és 6. feladatnál felhasználható bármely, az előadáson elhangzott állítás.

1. (a) Adja meg a következő fogalmak definícióját: bináris fa, bináris keresőfa, AVL-fa.
(b) Adjon alsó és felső becslést egy n csúcsú bináris keresőfa szintszámára!
Indokolja is válaszát.
(c) Nagyságrendileg hány szintje van egy n csúcsú AVL-fának? (Itt indoklás nem szükséges.)

2. Bizonyítsa be, hogy a Karp-redukció tranzitív: ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \prec L_3$, akkor $L_1 \prec L_3$.

3. Igaz-e, hogy a 2-SZÍN nyelv (a 2 színnel színezhető gráfok nyelve) benne van -ban?

4. Legyen k pozitív egész szám, $A[1:n]$ pedig egy olyan tömb, melyben 1 és M közötti különböző egész számokat tárolunk, nem feltétlenül rendezetten. Egy (j,i) számpárra azt mondjuk, hogy k-as hézag az A tömbben, ha $A[i] - A[j] \geq k$ és $A[j]$ és $A[i]$ közé nem esik másik A-beli elem (azaz nincs olyan $1 \leq \ell \leq n$ index, melyre $A[j] < A[\ell] < A[i]$ állna). Adjon $O(n + \lfloor M/k \rfloor)$ lépést használó algoritmust, ami adott k és A esetén talál egy k-as hézagot A-ban vagy ha nincs ilyen, akkor azt jelzi. (Például, ha a $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 14 & 15 & 23 & 20 \\ \hline\end{array}$ tömbben keresünk 5-ös hézagot, akkor a válasz $(2,4)$.)

5. A közös I ábécé feletti $L_1, L_2, \ldots, L_k$ nyelvekről (ahol $k \geq 1$ egész szám) tudjuk, hogy
(a) páronként diszjunktak (azaz $L_i \cap L_j = \emptyset$, ha $i \neq j$),
(b) uniójuk kiadja az összes szót (azaz $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k = I^*$) és
(c) rekurzívan felsorolhatóak (azaz $L_i \in \mathrm{RE}$ ha $1 \leq i \leq k$).
Bizonyítsa be, hogy ekkor mindegyik L_i nyelv rekurzív.

6. Éllistájával adott egy n csúcsú, e élű egyszerű, irányítatlan G gráf. Tudjuk, hogy G-ben van $K > n/2$ elemszámú független ponthalmaz. Adjon algoritmust, ami $O(n+e)$ lépésben talál egy $2K-n$ méretű független ponthalmazt G-ben.
(Segítség: használjunk fel egy tanult közelítő gráfalgoritmust.)

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2006. június 12.

Megoldásait mindig indokolja is meg. A 3–6. feladatoknál felhasználható bármely, az előadáson elhangzott állítás.

1. Írja le az összefésülés és az összefésüléses rendezés eljárását. Mennyi a lépésszámuk? (Válaszát bizonyítsa is be.)

2. Definiálja a Karp-redukciót és bizonyítsa be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és L_2 NP-ben van, akkor L_1 is NP-ben van.

3. Az L nyelv álljon azokból az irányított gráfokból, melyekben nincs irányított kör, de van irányított Hamilton-út. Vagy adjon az L nyelv felismerésére egy polinomiális lépésszámú algoritmust (a lépésszám nagyságrendjének meghatározásával együtt) vagy bizonyítsa be, hogy az L nyelv NP-teljes.

4. Igazolja, hogy ha lenne olyan Turing-gép, amely minden bemenet esetén megáll és a megállási nyelvet fogadja el, akkor RE=R is teljesülne.

5. Legyen $G = (V, E)$ egy súlyozott irányítatlan gráf, amiben minden él súlya pozitív. Tegyük fel, hogy G összefüggő, de nem teljes gráf. A G gráfhoz egy 0 súlyú élt akarunk hozzáadni úgy, hogy a keletkező G' gráfban a minimális feszítőfa súlya a lehető legkisebb legyen. Adjon algoritmust ami a mátrixával adott G gráfra $O(|V|^3)$ lépésben meghatározza, hogy melyik két, a G-ben nem összekötött pont közé húzzuk be az új élet.

6. Van n fájlunk, az i-edik fájl hosszát jelölje h_i. Tegyük fel, hogy a fájlok a hosszuk szerint nem csökkenő sorrendben követik egymást, azaz $0 < h_1 \le h_2 \le \cdots \le h_n$. Mentéskor két egyforma méretű lemez áll rendelkezésünkre. A mentésnek sorban kell történnie, előbb az első fájlról kell megmondani, melyik lemezre kerüljön, azután a másodikról, stb. (Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre.) Amikor a soron következő fájl már egyik lemezre se fér rá, akkor abbahagyjuk az eljárást. Egy ilyen eljárás optimális, ha a lehető legtöbb fájlt lehet segítségével kimenteni.

   Mutassa meg, hogy az a mohó eljárás, amikor a következő fájlt oda tesszük, ahol több hely van, nem feltétlenül optimális. Legfeljebb hány fájllal fogunk kevesebbet kimenteni ezzel a mohó eljárással az optimális (szintén sorrendben mentő) megoldáshoz képest?

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2006. június 19.

Megoldásait mindig indokolja is meg. A 3–6. feladatoknál felhasználható bármely, az előadáson elhangzott állítás.

1. Írja le a piros-kék algoritmust (a piros és kék szabállyal együtt). Az algoritmus helyességét nem kell bizonyítani.

2. Definiálja a 3SZÍN és MAXFTL nyelveket és adjon meg egy
3SZÍN $\prec$ MAXFTL Karp-redukciót (a redukció jóságát nem kell igazolni).

3. Legyen L egy nyelv, amiről tudjuk, hogy $5n^3 - 3n^2 + 2$ tárkorláttal felismerhető. Következik-e ebből, hogy az L komplementere az EXPTIME osztályba tartozik?

4. Álljon az L nyelv az olyan $w\#s\#x$ szavakból, ahol w egy M_w Turing-gép kódja és M_w az s bemenettel indítva a számítása során eljut valamikor abba az állapotba, aminek a kódja x. Igazolja, hogy $L \in RE$ és $L \notin R$.

5. Egy bajnokságban $2n$ csapat vesz részt. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszik. Minden mérkőzést a két résztvevő csapat valamelyikének a pályáján játszanak. A következő k forduló mindegyikére már adott, hogy ki kivel fog játszani (a beosztás tetszőleges lehet, pl. ugyanaz a két csapat többször is játszhat egymás ellen). Az viszont még nincs meghatározva, hogy melyik mérkőzés kinek a pályáján történjen. Olyan pályabeosztást szeretnénk készíteni az adott mérkőzésekhez, hogy minden csapat felváltva játszon a saját pályáján és idegenben (azaz, amelyik csapat az első fordulóban otthon játszik, az legközelebb idegenben, utána megint otthon, stb). Adjon $O(kn)$ lépésszámú algoritmust, ami elkészít egy ilyen pályabeosztást vagy jelzi, hogy ez nem lehetséges.

6. A 4 elemű I abc felett adott két szó: $x = x_1x_2 \cdots x_n$ és $y = y_1y_2 \cdots y_k$, ahol $1 \leq k \leq n$ és $x_i, y_j \in I$. Keressük az x szóban az olyan részszavakat, amelyek anagrammái y-nak, azaz az olyan i indexeket, hogy az $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$ betűk megfelelő sorrendbe rakva az y szót adják. Adjon algoritmust, ami x-ben az összes ilyen i helyet $O(n)$ lépésben meghatározza.

Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2006. június 26.

Megoldásait mindig indokolja is meg. A 3–6. feladatoknál felhasználható bármely, az előadáson elhangzott állítás.

1. Írja le az összes pontpár közötti legrövidebb úthossz meghatározására szolgáló Floyd-algoritmust. Mennyi az algoritmus lépésszáma, ha a gráf a mátrixával adott? Válaszát indokolja is.

2. Írja le az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezetet és annak tömbbel, illetve fákkal (útösszenyomás nélküli) való megvalósítását. Mennyi lesz a műveletek lépésszáma a két esetben? (Itt a lépésszámot nem kell indokolni.)

3. Legyen $L = \{w \in I^* \,:\, \exists\, M_w,\ L_{M_w} = \emptyset\}$. Bizonyítsa be, hogy $L \in \mathrm{co\,RE}$.

4. A $G = (V, E)$ egyszerű, irányítatlan gráfban legyen $X \subseteq V$ és $\overline{X} = V - X$ az X halmaz komplementere. Jelölje $m(X)$ az olyan élek számát, melyek X és $\overline{X}$ között futnak. Legyen
maxvágás $= \{(G, k) : \exists X \subseteq V,$ hogy $m(X) \geq k\}$,
maxfelezés $= \{(G, k) : \exists X \subseteq V,$ hogy $m(X) \geq k$ és $|X| = |\overline{X}|\}$.
Igazolja, hogy maxvágás $\prec$ maxfelezés.

5. Egy n emberből álló szervezetben b féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy a b bizottsági ülés kitűzhető-e összesen legfeljebb k különböző napra. Vagy adjon egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust vagy mutassa meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes.

6. Van n fájlunk, az i-edik fájl hosszát jelölje a h_i. Tegyük fel, hogy a h_i számok egészek. Mentéshez két egyformán L méretű lemez áll rendelkezésünkre (L pozitív egész szám). A cél, hogy minél nagyobb k számra az első k darab fájl mindegyikét mentsük ki a lemezekre. Fájlokat szétvágni nem szabad, minden fájl teljes egészében kerül az egyik vagy a másik lemezre. Adjon algoritmust, ami adott L és h_i számokhoz meghatározza, hogy melyik fájlt melyik lemezre tegyük ahhoz, hogy k a lehető legnagyobb legyen. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(L^2)$.