

1. $2304 = 2^8 \cdot 3^2$, $1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43$. Innen $(2304, 1032) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Másrészt:

$$\begin{array}{r} 2304 = 2 \cdot 1032 + 240 \\ 1032 = 4 \cdot 240 + 72 \\ 240 = 3 \cdot 72 + 24 \\ 72 = 3 \cdot 24 + 0 \end{array}$$
 Innen ugyancsak $(2304, 1032) = 24$.
2. $1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43$, innen $\varphi(1032) = 1032 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{42}{43} = 336$ és $d(1032) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$.
3. Pontosan azok a családok kapnak páratlan sok ajándékot, akiknek a háza sorszámanak páratlan sok osztója van. $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, ha n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. $d(n)$ pontosan akkor páratlan, ha minden tényező páratlan, azaz minden α páros. De ez azt jelenti, hogy n négyzetszám, mert $n = (p_1^{\alpha_1/2} p_2^{\alpha_2/2} \cdots p_k^{\alpha_k/2})^2$. Tehát azok kapnak páratlan sok ajándékot, akik négyzetszám sorszámu házában laknak. $400 = 20^2$, így 400-ig 20 négyzetszám van, azaz 20 család kap páratlan sok ajándékot.
4. $n^7 + 20n = n(n^6 + 20n)$. Ha $7|n$, akkor a szorzat osztható 7-tel, míg ha nem, akkor $(7, n) = 1$ (mert 7 prím), így alkalmazhatjuk az Euler–Fermat-tételt ($m = 7, a = n$ -nel; $\varphi(7) = 6$): $7|n^6 - 1$, innen $7|n^6 + 20$ is, mert a különbségük 21, az is osztható 7-tel. $n^7 + 20n$ mindkét esetben osztható 7-tel.
5. Legyen $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Az osztók száma $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$; mivel 11 prím, ezért ez csak úgy lehet osztható 11-gyel, ha valamelyik tényező osztható 11-gyel. Az a tényező legalább 11, így a megfelelő α legalább 10. A legkisebb szóba jövő ilyen számot akkor kapjuk, ha a legkisebb prím kitevője ez az α , azaz 2-é, és más nem is szerepel a prímtényezős felbontásban. De már $2^{10} = 1024$ is négyjegyű, így megfelelő háromjegyű szám nincs.
6. Berakom ezeknek a megoldásait is, de kongruenciák még nem kellenek zh-ra, a hátralévő feladatokból egyedül a 9. érdekes.
 - (a) $(3, 7) = 1|5$, így 1 megoldás lesz. Az 5, 12, 19, ... sorozatból 12 osztható 3-mal, így $x \equiv \frac{12}{3} \equiv 4 \pmod{7}$ a megoldás.
 - (b) $(14, 21) = 7 \nmid 8$, így nincs megoldás.
 - (c) $(9, 96) = 3|24$, így 3 megoldás lesz. A kongruenciát 3-mal leosztjuk: $3x \equiv 8 \pmod{32}$. A 8, 40, 72, ... sorozatból 72 osztható 3-mal, így $x \equiv \frac{72}{3} \equiv 24 \pmod{32}$, visszaírva az eredeti kongruenciába: $x \equiv 24, 24 + 32, 24 + 2 \cdot 32 \pmod{96}$ a megoldások.
 - (d) $(11, 18) = 1|12$, így egy megoldás lesz. A 12, 30, 48, 66, ... sorozatból 66 osztható 11-gyel, így $x \equiv 6 \pmod{18}$ a megoldás.
 - (e) $(6, 21) = 3|21$, így 3 megoldás lesz. $2x \equiv 1 \pmod{7}$, az 1, 8, 15, ... sorozatból 8 osztható 2-vel, így a megoldás $x \equiv \frac{8}{2} \equiv 4 \pmod{7}$, és az eredeti kongruencia megoldásai $x \equiv 4, 11, 18 \pmod{7}$.
7. Az utolsó két jegy éppen a 100-zal való osztási maradék. $(253, 100) = 1$ és $\varphi(100) = 40$, így az Euler–Fermat-tétel alapján $253^{683} \equiv 53^3 \pmod{100}$. $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2$. Itt az első két tag osztható 100-zal, azaz $53^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{100}$, és $53^3 \equiv 53 \cdot 9 \equiv 477 \equiv 77 \pmod{100}$, azaz az utolsó két jegy 77.
8. Vegyük észre, hogy $\varphi(35) = 24$; $(3, 35) = 1$ és $(4, 35) = 1$ miatt az Euler–Fermat-tétel alapján $4^{24} \equiv 1 \pmod{35}$ és $3^{24} \equiv 1 \pmod{35}$, azaz ugyanúgy 1 maradékot adnak 35-tel osztva, így a különbségük osztható 35-tel.
9. $111 = 3 \cdot 37$ miatt a 11100...0 alakú számok mind oszthatóak 37-tel. Vegyük azokat, amiknek rendre 56, 53, 50, ..., 2 darab 0 van a végén; ezeket összeadva éppen a kívánt számnál 11-gyel kisebbet kapunk (mert a végén két egyes helyett két nulla van); ez a szám osztható 37-tel, így az eredeti szám osztási maradéka 11.

10. Az utolsó jegy a 10-zel való osztási maradék. $13 \equiv 3 \pmod{10}$. $(13, 10) = 1$ és $\varphi(10) = 4$, így az Euler–Fermat-tétel alapján $13^{11^{9^7}} \equiv 3^{3^{9^7}} \pmod{10}$. $(4, 9) = 1$ és $\varphi(4) = 2$, így még egyszer alkalmazva a tételt: $3^{3^{9^7}} \equiv 3^{3^{1^7}} \pmod{10}$. Ez pedig már kiszámolható, és így

$$13^{11^{9^7}} \equiv 3^{3^{1^7}} \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10},$$

azaz az utolsó jegy 7.