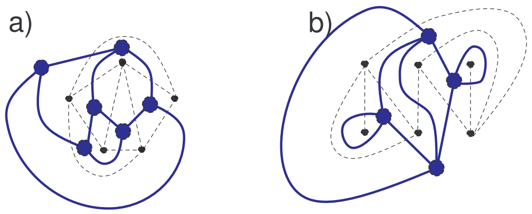
Számítástudomány alapjai
8. gyakorlat, megoldások
2005. 11. 10.

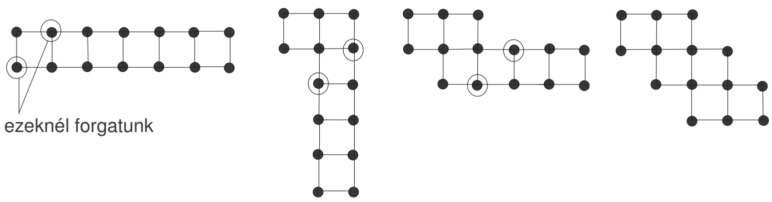
1. Íme.



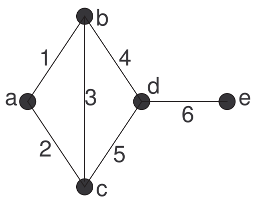
2. G-nek $\frac{20\cdot 3}{2} = 30$ éle van. Ha síkba rajzoljuk, akkor a síkrajz összefüggő lesz, és a tartományok számát meg tudjuk határozni az Euler-formulából: $c - e + t = 2$, ahol $c = 20$ és $e = 30$, így $t = 12$. G^* pontjai megfelelnek G tartományainak, így ezek száma is 12.

3. Legyen k az ötszögek, l a hatszögek száma, e pedig az élek száma. Fel tudunk írni k-ra és l-re egyenleteket. Egyrészt $e = \frac{5k+6l}{2}$, mert az éleket összeszámolhatjuk úgy, hogy minden ötszögnek 5 éle, minden hatszögnek 6 éle van, de ekkor minden élet kétszer számoltunk, a két határoló sokszögnél. Minden csúcsban 3 él fut össze, azaz a poliédernek megfelelő gráf 3-reguláris, és így $e = \frac{3c}{2}$, azaz $c = \frac{2e}{3}$. Ezeket beírva az Euler-formulába: $2 = c - e + t = \frac{2e}{3} - e + (k+l) = \frac{e}{3} + (k+l) = -\frac{5k+6l}{6} + (k+l) = \frac{k}{6}$, innen $k = 12$, ennyi tehát az ötszögek száma. A hatszögek száma, l kiesett az egyenletből, és valóban lehet többféle is: például a szabályos dodekaédernek 12 ötszöglapja van és nincs benne hatszög, a focilabdának pedig 12 ötszöglapja és 20 hatszöglapja van.

4. Az ábra úgy akart kinézni, hogy a baloldaliban is 6 darab négyzet van, egyébként nyilván nem gyengén izomorfak, mert az élszám különbözik. Úgy viszont már tényleg gyengén izomorfak. Whitney tétele szerint olyan lépésekkel alakítjuk egymásba őket, hogy két elvágó csúcsnál szétszedjük a gráfot két részre, majd az egyik darabot fordítva visszatesszük.



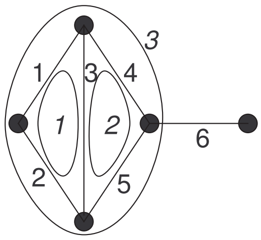
5. A csúcsokat betűkkel, az éleket számokkal jelöltem az alábbi módon.

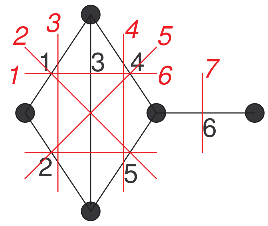


Ezután a szomszédsági és az illeszkedési mátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 3 kör van, ezeket rajzoltam be ívvel, és 7 vágás, ezek a jobboldali ábrán a piros vonalak. A dőlt betűk jelölik a köröket illetve a vágásokat a két ábrán.





Ez alapján a kör- és a vágásmátrix:

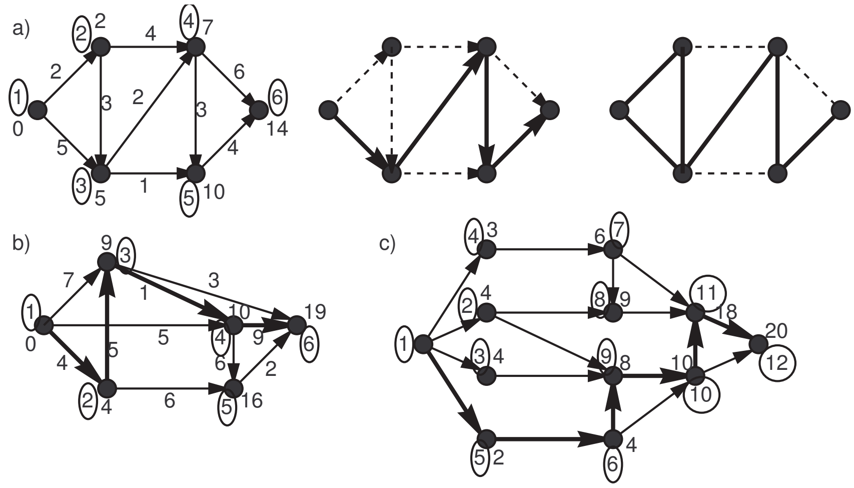
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. (Ez részletesebb, mint ami zh-ban kell.) Az a) rész megoldása. A PERT módszert alkalmazzuk. Először meg kell határozni, milyen sorrendben vizsgáljuk meg a csúcsokat. Az első csúcs mindig a kiindulási forrás. A másodikat úgy választjuk ki, hogy letakarjuk az első csúcsot, és a maradékból egy forrást (tehát olyan csúcsot, amibe nem fut él, csak a most letakart elsőből) választunk (ha több van, bármelyik jó). Ezután az első két kiválasztott csúcsot letakarjuk, a maradékból egy forrás lesz a harmadik csúcs, majd az eddigi három kiválasztottattakarjuk le, és így tovább. Az utolsó csúcs az eredeti nyelő lesz. Az ábrán a csúcsokhoz tartozó bekarikázott számok jelölik a sorrendet.

   Ezután ebben a sorrendben végigmegyünk a csúcsokon, és mindegyikre meghatározzuk az oda vezető maximális út hosszát. Ez az első csúcsra 0 (onnan indulunk), a második csúcsba csak az első csúcsból lehet eljutni egy 2 súlyú élen át, így az oda vezető egyetlen út hossza 2. A harmadik csúcsba már két lehetőségünk van, vagy az első, vagy a második csúcsból juthatunk oda; az elsőből vezető út hossza 5, a másodikból vezető leghosszabb úté is 5, így a maximális út hossza 5. Ezt folytatjuk. A 6. csúcshoz vezető leghosszabb út úgy adódott, hogy a 6. csúcsba vagy a 4., vagy az 5. csúcsból jöttünk; ha a 4.-ből, akkor a leghosszabb út hossza 7+6 (7 volt a 4.-be a leghosszabb út, ehhez jön egy 6 súlyú él), ha az 5. csúcsból, akkor a leghosszabb út hossza 10+4, ebből az utóbbi több, így a 6.-ba vezető leghosszabb út hossza 14.

   Az utolsó csúcsba vezető leghosszabb út hossza már megvan, már csak a konkrét utat kell megadni (ezt kritikus útnak hívjuk). Ezt visszafelé csináljuk: az utolsó előtti csúcs az, amelyikből a 6.-ba írt számot kaptuk (itt az 5. csúcs, mert azon keresztül megy hosszabb út a 6.-ba), az azelőtti az, amelyikből az 5.-be írt számot kaptuk (a 4.) és így tovább. Ha egy csúcsba több helyről is jöhetünk maximális úton, akkor bármelyik jó a kritikus útba (ami esetleg többféle lehet). Egy kritikus út van a középső ábrán. A kritikus élek meghatározásánál akkor, amikor az előbbi módszernél visszafelé menet több lehetőségünk is van, akkor mindegyikhez tartozó él kritikus (tehát nem az egyiket kell venni, hanem az összeset). A kritikus élek a jobboldali ábrán vannak berajzolva.

   A b) és c) rész hasonló, megadtam a sorrendet (karikázott számok), az egyes csúcsokba vezető leghosszabb út hosszát, valamint a kritikus utat (ezekben a gráfokban csak egy kritikus út van, ekkor ennek az élei a kritikus élek).



8. A-ból D-be három út vezet: ABD, ACD és $ABCD$. A szükséges idő az ezen utak mentén szükséges idő maximuma: $\max(a+1, 2+b, a+1+b) = \max(2+b, a+1+b)$ (mert $a, b \geq 0$ miatt $a+1 \leq a+1+b$, így az nem számít a maximumban).