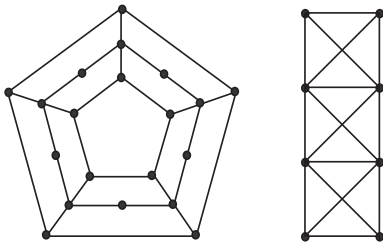
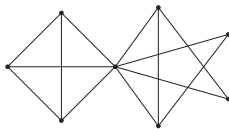


1. Mindkettő kétszeresen összefüggő.



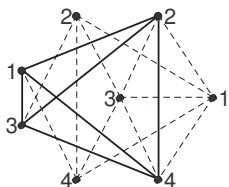
Egy csúcs elhagyása esetén nem esnek szét; a baloldali gráfban lényegében csak 4-féle különböző csúcs van (kívül egy, középen kettő, belül egy), bármelyiket is hagyjuk el, a gráf összefüggő marad. A jobboldali gráfban kétféle csúcs van, ezek egyikének elhagyása esetén sem esik szét. Az előbbiek miatt legalább kétszeresen összefüggőek. Két csúcsot viszont már el lehet hagyni úgy, hogy szétessenek; a baloldali gráfban egy másodfokú csúcs két szomszédját, a jobboldali gráfban pl. a második sor két csúcsát lehet elhagyni úgy, hogy két komponensre essen szét.

2. Egyszeresen összefüggő, mivel a középső csúcsot elhagyva szétesik. Kétszeresen élösszefüggő. Van másodfokú csúcsa, annak a két élét elhagyva szétesik, bármelyik egy élet elhagyva viszont még nem esik szét.



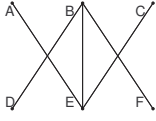
3. Menger tétele miatt bármely két csúcs között van három csúcsdiszjunkt út. Vegyünk két csúcsot és a köztük vezető három utat. Ezek közül vagy legalább kettő páros hosszú, vagy legalább kettő páratlan hosszú. Mindkét esetben a két azonos paritású utat összerakva egy páros hosszú kört kapunk.
4. G -ből el lehet hagyni k csúcsot úgy, hogy szétessen; ezeket és az új csúcsot elhagyva H is szétesik, tehát H maximum $k + 1$ -szeresen összefüggő. Ha H -ből elhagyunk $k + 1$ -nél kevesebb csúcsot, akkor két eset van aszerint, elhagyjuk-e az új csúcsot. Ha nem, akkor H nem esik szét. Ha igen, akkor a régiek közül kevesebb, mint k darabot hagyunk el, így nem esik szét, mivel G k -szorosan összefüggő. Így H $k + 1$ -nél kevesebb csúcs elhagyása esetén nem esik szét, tehát legalább $k + 1$ -szeresen összefüggő. Így H pontosan $k + 1$ -szeresen összefüggő.

5. 4 színnel színezzhető az ábra szerint, és van benne 4 csúcsú klikk is, ezt a megvastagított élek mutatják, tehát 4 szín kell is. Így $\chi = 4$.



6. Hagyjuk el a v csúcsot. Minden páratlan kör átment v -n, így a gráfban nem maradt páratlan kör, tehát a maradék páros gráf, ami két színnel színezzhető. v megkaphatja a harmadik színt, és ezzel kiszíneztük a gráfot három színnel.
7. A színezés éppen a gráf független pontthalmazokra való felbontás. $\alpha(G)$ definíciója miatt minden színosztály mérete $\leq \alpha$, van belőlük χ darab, tehát összméretük $\leq \chi\alpha$. De együtt az összes csúcsot tartalmazzák, összméretük $n = |V(G)|$ és így $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$.

8. A gráf páros, kromatikus száma 2. Ha a csúcsokat A, B, C, D, E, F sorrendben színezzük mohón, akkor A, B és C az 1-es színt kapja, D, E, F pedig a 2-est, tehát ekkor a mohó algoritmus optimálisan színezést ad. Ha azonban az A, C, D, F, B, E sorrendben színezzük, akkor az első 4 csúcs mind 1-es színű lesz, mert egyik sincs összekötve a korábbiakkal, B 2-es és E 3-as, ez rosszabb, mint az optimális.



9. $\Delta = 5$, így χ_e értéke 5 vagy 6. 5 színnel színezhetőek az élek, így $\chi_e = 5$. (Az ábrán ugyanaz a színezés van egyszer tényleg színekkel, egyszer pedig különböző vastagságú/szagatott vonalakkal jelölve a megfelelő élek színét.)

