Számítástudomány alapjai
13. gyakorlat
2004. 05. 18.

1. Mutassunk az egészeknek olyan részgyűrűjét, amiben nincs egységelem.

2. Vezessük le a gyűrűaxiómákból, hogy $a \cdot 0 = 0$ minden a-ra.

3. Mutassunk a 2×2-es mátrixok gyűrűjében a nullától és egytől különböző
   (a) nullosztót,
   (b) nilpotens elemet,
   (c) idempotens elemet.

4. Mutassunk nemnulla nilpotens elemre példát $\mathbb{Z}_8$-ban.

5. (a) Mutassuk meg, hogy kommutatív gyűrűben két nilpotens elem szorzata is nilpotens.
   (b) Mutassunk a 2×2-es mátrixok gyűrűjében két nilpotens elemet, amelyek szorzata nem nilpotens (azaz az (a) rész állítása nem kommutatív gyűrűben nem feltétlenül teljesül).

6. Vegyünk egy csoportot, ebből konstruálunk egy gyűrűt a következő módon: az alaphalmaz a csoport elemeinek halmaza, az összeadás a csoport művelete (és persze a 0 a csoport egységeleme), a szorzást pedig úgy definiáljuk, hogy bármely két elem szorzata 0. Gondoljuk meg, hogy így valóban gyűrűt kapunk (amit zérógyűrűnek nevezünk).

Gyűrűk és testek

Az R halmaz a $+$ és $*$ műveletekkel gyűrű, ha
1. a $+$ művelettel kommutatív csoport (egységeleme a 0),
2. a $*$ művelet asszociatív és
3. $(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$ minden $a, b, c \in R$-re (disztributivitás).

Az F halmaz a $+$ és $*$ műveletekkel test, ha
1. F a $+$ művelettel kommutatív csoport (egységeleme a 0),
2. $F - \{0\}$ a $*$ művelettel csoport és
3. $(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$ minden $a, b, c \in R$-re (disztributivitás).

Egy gyűrűt illetve testet kommutatívnak nevezünk, ha a *szorzás* kommutatív.

Példák gyűrűkre:

- az egész számok a szokásos műveletekkel,
- a polinomok,
- az $n \times n$-es valós elemű mátrixok az összeadással és mátrixszorzással,
- az $n \times n$-es egész elemű mátrixok az összeadással és mátrixszorzással,
- $\mathbb{Z}_n$, ahol $\mathbb{Z}_n$ elemei a számok 0-tól $n-1$-ig, műveletek a szorzás és összeadás modulo n.

Példák testekre:

- a racionális számok a szokásos műveletekkel,
- a valós számok a szokásos műveletekkel,
- a komplex számok a szokásos műveletekkel,
- ha n prím, akkor $\mathbb{Z}_n$ nemcsak gyűrű, hanem test is.

Gyűrűkben vannak mindenféle nevezetes elemek. Az a elem nilpotens, ha valamelyik hatványa nulla. A b elem idempotens, ha $b^2 = b$, pl. a 0 ilyen, és ha van 1, akkor az is; de vannak mások is (lásd 3. feladat). A c elem nullosztó, ha ő maga nem nulla, és mindkét oldalról van olyan nemnulla elem, amivel megszorozva nullát kapunk.

Egy gyűrűt illetve testet kommutatívnak nevezünk, ha a *szorzás* kommutatív.

Végezetül egy érdekesség: minden véges test kommutatív (Wedderburn tétele).