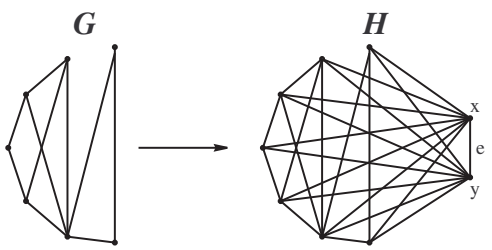
Számítástudomány alapjai
9. gyakorlathoz megoldások

1. A Karp-redukció: tetszőleges G gráfra legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G-hez hozzáveszünk két csúcsot, amit összekötünk az összes régi csúccsal és egymással is. Azt kell bizonyítanunk, hogy G pontosan akkor színezhető 3 színnel, ha H 5 színnel színezhető. Ha G színezhető 3 színnel, akkor H-ban kiszínezzük 3 színnel a G részgráfot, és a maradék két színt megkapja a két új csúcs, ezzel kiszíneztük H-t 5 színnel. Most fordítva, ha H színezhető 5 színnel, akkor az egyik új csúcs színét semelyik másik csúcs nem kaphatta meg, mert az a csúcs az összes többivel össze van kötve. Hasonlóan a másik csúcs színét sem kaphatta meg rajta kívül más csúcs, így a gráf maradék részére (ami éppen G) 3 szín marad, azaz G színezhető 3 színnel.

2. NP-teljes. Az igen választ tanúsítja egy e-n átmenő Hamilton-kör, ami polinom időben ellenőrizhető, így a tanú-tétel szerint a probléma NP-beli. Egy régi NP-teljes feladatot, a Hamilton-út kérdését vezetjük vissza erre. Legyen G egy gráf, amiről azt akarjuk eldönteni, hogy van-e benne Hamilton-út. Legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy G-hez hozzáveszünk két csúcsot, amit összekötünk az összes régi csúccsal és egymással is, és az összekötő él legyen e (a visszavezetés érdekes módon pont ugyanaz, mint az előző feladatban).



Azt kell belátnunk, hogy H-ban pontosan akkor van e-n átmenő Hamilton-kör, ha G-ben van Hamilton-út. Ez világos: egy G-beli Hamilton-út kiegészíthető a két végpontjából x-be és y-ba vezető élekkel és e-vel, így H-ban e-n átmenő Hamilton-kör lesz, míg ugyanez fordítva is megtehető: ha H-ban van e-n átmenő Hamilton-kör, akkor ebből elhagyva e-t és a két e-vel szomszédos élet, egy G-beli Hamilton-utat kapunk.

3. P-beli. Ez lényegében azért van, mert a színek közül kettőt használhatunk fel szabadon, így ez egy kettő-színezési probléma (kicsit felturbózva, de azért polinom idejű marad). Lássuk. Ha van megfelelő színezés, akkor két színt a négy közül legfeljebb 3 csúcs kap, és a többi csúcs csak a maradék két színnel van színezve. A legfeljebb 3 csúcsra persze többféle lehetőség van: lehet 1+2, 0+2, 1+1, 0+1, 0+1, 0+0 (a *legfeljebb* 1, illetve 2 csúcs miatt). Az első lehetőségnél a kiválasztásra $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$ lehetőség van, ez n-nek polinomja, hasonlóan a többi eset is az. Ha már valahogyan ki van választva és színezve az 1+2 csúcs, akkor a gráf maradék részén a két színnel színezhetőséget kell ellenőrizni, ami polinom idejű. Ezek alapján az algoritmus: végigmegyünk az 1+2, 0+2, 1+1, 0+1, 0+1, 0+0 lehetőségeken sorban. Mindegyiken belül végigmegyünk az összes lehetőségen a csúcsok kiválasztására, pl. 1+2-nél ez $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$ eset, ez n-nek polinomja. Mindegyiknél megnézzük, hogy a 2 kijelölt csúcs között van-e él, ha igen, akkor ugrunk a következő esetre. Ha nem, akkor megnézzük, a maradék színezhető két színnel (ez független a kijelölt 3 csúcstól és polinom időben megtehető). Ha igen, készen vagyunk és az egész gráf színezhető két színnel. Ha nem, megyünk a következő esetre. Miután végignéztük az összes 1+2 típusút, megyünk a 0+2-re és így tovább. Ha minden esetet megnéztünk és semelyik nem volt jó, akkor nincs jó színezés. Az egész program polinom sok esetből áll, mindegyik polinom idő alatt megvizsgálható, így a program futási ideje is polinom.

4. P-beli. Pontosan akkor van a gráfban e-n átmenő kör, ha e-t elhagyva a maradék gráfban e két végpontja egy komponensben van. Hagyjuk el a gráfból az e élet és indítsunk egy bejárást az egyik végpontból. Ez polinom idő alatt megvan. Nézzük meg, hogy a bejárt pontok között ott van-e e másik végpontja. Ha igen, akkor van e-n átmenő kör, ha nem, akkor nem.

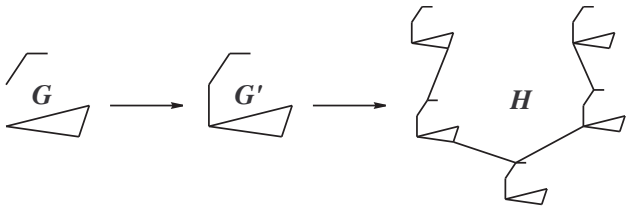
5. NP-teljes. Az igen választ tanúsítja egy megfelelő színezés, ami polinom időben ellenőrizhető. Visszavezetjük erre a kérdésre a három színnel színezhetőség problémáját (ami NP-teljes). Tetszőleges G-hez legyen H az a gráf, amit úgy kapunk, hogy hozzáveszünk még két csúcsot, x-et és y-t, amit nem kötünk össze semmivel. Ha G színezhető volt 3 színnel, akkor H színezhető 3 színnel úgy, hogy x és y színe különböző legyen, mert egyszerűen kiegészítjük G színezését úgy, hogy x megkapja az 1-es, y a 2-es színt. Fordítva, ha H színezhető 3 színnel úgy, hogy x és y színe különböző, akkor G is színezhető 3 színnel, mivel G részgráfja H-nak.

6. NP-teljes. A tanú világos. Az előző feladat visszavezetése egy az egyben működik. Az ember azt gondolná, hogy x-et és $y - t$ érdemes összekötni, hogy valahogy ebbe legyen belekódolva az, hogy különböző színűek, de erre nincs szükség (noha az is jó). Attól, hogy nincsenek öszekötve, kaphatnak különböző színt. Érdemes végignézni az előző feladat gondolatmenetét lépésről lépésre, tényleg minden stimmel itt is.

7. P-beli. A kulcs az, hogy a gráf síkbarajzolható, így nem lehet benne 5 vagy annál nagyobb méretű teljes részgráf (klikk). Azaz az algoritmus: ha $k \geq 5$, akkor készen vagyunk, nincs a gráfban k méretű klikk, ha pedig $k < 5$, akkor csak 4 eset lehet: $k = 1, 2, 3$ vagy 4, ezek mindegyike polinom időben megnézhető (persze adott k-ra elég az egyiket lefuttatni).

8. NP-teljes. Egy legalább k hosszú kör tanúsítja az igen választ és polinom időben ellenőrizhető, így NP-beli. Visszavezetjük erre a problémára a Hamilton-kör keresést. Csináljunk egy H gráfot, ami úgy néz ki, hogy vesszük G öt példányát. Ez egy $n = 5k$ csúcsú gráf, amiben nyilván pontosan akkor van legalább k hosszú kör, ha G valamelyik példányában van legalább k hosszú kör, azaz Hamilton-kör.

   Mivel a mostani feladatban összefüggő gráf kell, ezért ez így még nem jó visszavezetés; először is, ha G nem összefüggő, akkor összefüggővé kéne tenni úgy, hogy Hamilton-kör azért ne keletkezzen benne. Ez megtehető polinom időben, mert G komponensei felismerhetőek polinom időben, és ezeket sorban összekötjük egy-egy éllel (ha úgy tetszik, egy feszítőfát varázsolunk rájuk). Új kört ezzel nem hozunk létre, mert egy kör nem nyúlhat át a komponensek között, hiszen csak egy-egy éleket húztunk be. Ezután a kapott G' gráf öt példányát összekötjük egy-egy éllel hasonlóan, mint az előbb (ábra).

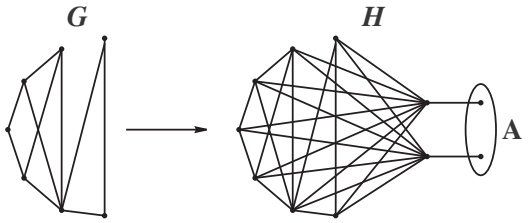


   Még egy dolog: ha az eredeti G nem összefüggő, akkor persze nincs benne Hamilton-kör, de ettől még nem mondhatjuk azt, hogy akkor ezekre nem is nézzük tovább a dolgot, mert a Karp-redukciónál egy feladat inputját kell visszavezetni egy másik feladat inputjára. Ha nem összefüggő, akkor is meg kell csinálni a visszavezetést, csak persze ügyesen, úgy, hogy a végén nem legyen a válasz.

9. P-beli. Egy x csúcsból elindított szélességi bejárás megadja az összes többi csúcs x-től mért távolságát (a köztük futó legrövidebb út hosszát). Minden csúcsból indítunk egy szélességi bejárást, így megvan bármely két pont között a legrövidebb út hossza. Ha ezek között van legalább k, igen a válasz, ha nem, nem. Ez az egész polinom idejű, mert a bejárás az, minden csúcsból egy bejárás az csak egy n-szeres szorzó, az $\binom{n}{2}$ darab értéket végignézni pedig $\binom{n}{2}$, azaz szintén polinom idő alatt lehet.

10. P-beli. Miről is van itt szó? Olyan feszítőfa, amiben az S-beli csúcsok mind elsőfokúak. Azaz G-nek egy olyan feszítőfája, amiben a $G \backslash S$-beli csúcsokon a feszítőfa akárhogyan kinézhet, de az S-beli csúcsok mind elsőfokúak, azaz $G \backslash S$-be vannak bekötve. Ez ellenőrizhető polinom időben: azt kell tehát megnézni, hogy $G \backslash S$ összefüggő-e, és azt, hogy fut-e minden S-beli csúcsból él $G \backslash S$-be, ez utóbbi is nyilván polinom időben megoldható. Ha mindkettőre igen a válasz, akkor van ilyen feszítőfa, ha valamelyikre nem, akkor nincs.

11. NP-teljes. A tanú nyilvánvaló. Az előbbihez képest az a különbség, hogy az $A = S$ egy sokkal erősebb megkötés a gráf szerkezetére. Ha például A 2 elemű, akkor a feszítőfa csak úgy nézhet ki, hogy egy Hamilton-út, aminek a két végpontja A két eleme. Persze ha a Hamilton-utat szeretnénk erre visszavezetni, akkor nem ilyen egyszerű a helyzet, mert ott nincs kijelölve két végpont, míg nekünk kéne. A lezárás gondolata szerepelt már, most még adunk neki két új végpontot. Az ábra magáért beszél.



12. P-beli. Egyszerűen az összes csúcspárt végig kell nézni ($\binom{n}{2}$ darab). Ha egy pár összekötött, lépünk tovább, ha nem, akkor meg kell határozni a fokaikat (maximum $2n$ idő) és ellenőrizni, hogy az összegük nagyobb-e mint n. Az egész kevesebb, mint n^3 idő alatt megvan. Mellesleg nyilván azért jók az ilyen elégséges feltételek, mert gyorsabban ellenőrizhetőek, mint maga a Hamilton-kör.