Számítástudomány alapjai
Megoldások a próbazh-hoz

1. A G gráfot n színnel lehet színezni, méghozzá úgy, hogy mind az n színt két csúcsnál használjuk fel: minden egyes elhagyott él két végpontja kap egy színt. Innen $\chi(G) \leq n$. G-ben van n méretű klikk, hiszen ha kiválasztjuk minden egyes elhagyott él egyik végpontját, akkor ezek klikket alkotnak. Így $\omega(G) \geq n$. Végül $n \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, így végig egyenlőség áll, és $\chi(G) = n$.

2. G egy tetszőleges feszítőfájában egy elsőfokú csúcsot elhagyva G összefüggő marad (hiszen a maradék feszítőfa „összetartja").

3. Legyen i és j két rögzített csúcs (sorszáma); létezik őket összekötő út, hiszen a gráf összefüggő. Vegyünk i és j között egy lehetséges utat, legyen ennek hossza k. Az A^k mátrix i-edik sorának j-edik eleme éppen az i és j csúcs közötti k hosszú *séták* száma; ez legalább 1, hiszen van i és j között k hosszú *út*. Ez azt mutatja, hogy k jó választás a feladathoz.

4. NP-teljes. A tanú-tétel szerint NP-beli, mert az igen választ tanúsítja egy olyan kör, ami S minden pontján átmegy; ez polinom időben ellenőrizhető. Karp-redukáljuk erre a problémára a Hamilton-kör problémáját: legyen tetszőleges G gráfhoz $H = G$ és $S = V(H)$. Ekkor a Hamilton-kör definíciója miatt pontosan akkor létezik G-ben Hamilton-kör, ha létezik H-ban S összes pontján átmenő kör.

5. P-beli. Tekintsük azt a H gráfot, aminek csúcsainak halmaza S, és azok vannak összekötve, amik G-ben is össze voltak (azaz G-nek az S-en vett feszített részgráfját). A feladat éppen azt kérdezi, hogy van-e H-ban kör. Ezt megállapíthatjuk úgy, hogy H-n végrehajtunk egy bejárást (ez megadja H minden komponensének egy feszítőfáját), majd végignézzük H éleit. Ha maradt ki él, akkor az kört alkot az eddigiek közül néhánnyal, így H-ban van kör, míg ha nem maradt ki él, akkor H-ban nincs kör. Az a kör szempontjából lényegtelen, hogy H összefüggő vagy több komponensből áll. A bejárás és az élek végignézése is végrehajtható polinom időben (sőt, lineáris időben), így a probléma polinom időben megoldható.

6. $111 = 37 \cdot 3$, innen $\underbrace{11\ldots1}_{\text{57db 1-es}}00 = \underbrace{100100\ldots100}_{\text{19db 100}} \cdot 111$ osztható 37-tel. A kérdéses szám ennél 11-gyel nagyobb, így a 37-tel való osztási maradéka 11.

7. Először redukáljuk 58^{22}-t modulo 44. $44 = 2^2 \cdot 11$, innen $\varphi(44) = 44 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{11} = 20$. Az alapot 44, a kitevőt $\varphi(44)$ szerint redukálva azt kapjuk, hogy $58^{22} \equiv 14^2 \pmod{44}$. $14^2 = 196$, ezt 44-gyel maradékosan osztva a maradék 20, tehát a $12x \equiv 20 \pmod{44}$ kongruenciát kell megoldani. $(44, 12) = 4|20$, így van megoldás, méghozzá 4 darab. Leosztva kapjuk a $3\tilde{x} \equiv 5 \pmod{11}$ kongruenciát, aminek megoldása $\tilde{x} \equiv 5$ (az $5, 5 + 11, 5 + 2 \cdot 11, \ldots$ sorozatból $5 + 2 \cdot 11 = 27$ osztható 3-mal). Így az eredeti kongruencia megoldásai $x \equiv 9, 9 + 11, 9 + 2 \cdot 11, 9 + 3 \cdot 11 \pmod{44}$.

8. Igen, csoportot alkotnak. Ellenőrizzük az axiómákat. $(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc = a * (2bc) = a * (b * c)$, így az asszociativitás teljesül. Az $a * e = a$ egyenletből $2ae = a$, ez minden a-ra teljesül, ha $e = \frac{1}{2}$, így $\frac{1}{2}$ az egységelem. Egy a elem inverze: $a^{-1} * a = e = \frac{1}{2}$-ből $a^{-1} = \frac{1}{4a}$, ez létezik minden $a \in \mathbb{R} - \{0\}$-ra, így minden elemnek van inverze. Teljesül az asszociativitás, van egységelem és minden elemnek van inverze, így ez valóban csoport.