

1. $n^7 + 20n = n(n^6 + 20n)$. Ha $7|n$, akkor a szorzat osztható 7-tel, míg ha nem, akkor $(7, n) = 1$ (mert 7 prím), így alkalmazhatjuk az Euler–Fermat-tételt ($m = 7, a = n$ -nel; $\varphi(7) = 6$): $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$, innen $n^6 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$, azaz $n^6 + 20$ osztható 7-tel. $n^7 + 20n$ mindkét esetben osztható 7-tel.
2. $12 = 2^2 \cdot 3$ és $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Mind a két számban szerepelnie kell $2^2 \cdot 3$ -nak (mert ez a legnagyobb közös osztó (lnko)), és el kell még osztanunk valahogyan a maradék $2^2 \cdot 5$ -öt. 5-ös tényező az egyik számba kell, hogy kerüljön, viszont a másikba nem (mert akkor a lnko 5-tel is osztható lenne), míg 2^2 is kell, hogy az egyik számban szerepeljen, hogy a legkisebb közös többszörösben legyen összesen 4 darab 2-es tényező (2^4). Viszont ekkor a másikban már nem lehet több, mint kettő. Így a két lényegesen különböző eset az, hogy a 2^2 és az 5 ugyanabba a számba kerülnek-e vagy nem; így $a = 2^4 \cdot 3, b = 2^2 \cdot 5$ és $a = 2^4 \cdot 3 \cdot 5, b = 2^2 \cdot 3$ megoldások, és persze a, b felcserélésével is jó megoldásokat kapunk.
3. Legyen $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Az osztók száma $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$; mivel 11 prím, ezért ez csak úgy lehet osztható 11-gyel, ha valamelyik tényező osztható 11-gyel. Az a tényező legalább 11, így a megfelelő α legalább 10. A legkisebb szóba jövő ilyen számot akkor kapjuk, ha a legkisebb prím kitevője ez az α , azaz 2-é, és más nem is szerepel a prímtényezős felbontásban. De már $2^{10} = 1024$ is négyjegyű, így megfelelő háromjegyű szám nincs.
4. (a) $(3, 7) = 1|5$, így 1 megoldás lesz. Az 5, 12, 19, ... sorozatból 12 osztható 3-mal, így $x \equiv \frac{12}{3} \equiv 4 \pmod{7}$ a megoldás.
(b) $(14, 21) = 7|8$, így nincs megoldás.
(c) $(9, 96) = 3|24$, így 3 megoldás lesz. A kongruenciát 3-mal leosztjuk: $3x \equiv 8 \pmod{32}$. A 8, 40, 72, ... sorozatból 72 osztható 3-mal, így $x \equiv \frac{72}{3} \equiv 24 \pmod{32}$, visszaírva az eredeti kongruenciába: $x \equiv 24, 24 + 32, 24 + 2 \cdot 32 \pmod{96}$ a megoldások.
(d) $(11, 18) = 1|12$, így egy megoldás lesz. A 12, 30, 48, 66, ... sorozatból 66 osztható 11-gyel, így $x \equiv 6 \pmod{18}$ a megoldás.
(e) $(6, 21) = 3|2$, így 3 megoldás lesz. $2x \equiv 1 \pmod{7}$, az 1, 8, 15, ... sorozatból 8 osztható 2-vel, így a megoldás $x \equiv \frac{8}{2} \equiv 4 \pmod{7}$, és az eredeti kongruencia megoldásai $x \equiv 4, 11, 18 \pmod{7}$.
5. Az utolsó két jegy éppen a 100-zal való osztási maradék. $(253, 100) = 1$ és $\varphi(100) = 40$, így az Euler–Fermat-tétel alapján $253^{683} \equiv 53^3 \pmod{100}$. $53^2 = (50+3)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 3 + 3^2$. Itt az első két tag osztható 100-zal, azaz $53^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{100}$, és $53^3 \equiv 53 \cdot 9 \equiv 477 \equiv 77 \pmod{100}$, azaz az utolsó két jegy 77.
6. Vegyük észre, hogy $\varphi(35) = 24$; $(3, 35) = 1$ és $(4, 35) = 1$ miatt az Euler–Fermat-tétel alapján $4^{24} \equiv 1 \pmod{35}$ és $3^{24} \equiv 1 \pmod{35}$, azaz ugyanúgy 1 maradékot adnak 35-tel osztva, így a különbségük osztható 35-tel.
7. $111 = 3 \cdot 37$ miatt a 11100...0 alakú számok mind oszthatóak 37-tel. Vegyük azokat, amiknek rendre 56, 53, 50, ..., 2 darab 0 van a végén; ezeket összeadva éppen a kívánt számnál 11-gyel kisebbet kapunk (mert a végén két egyes helyett két nulla van); ez a szám osztható 37-tel, így az eredeti szám osztási maradéka 11.
8. Az utolsó jegy a 10-zel való osztási maradék. $13 \equiv 3 \pmod{10}$. $(13, 10) = 1$ és $\varphi(10) = 4$, így az Euler–Fermat-tétel alapján $13^{11^{97}} \equiv 3^{3^{97}} \pmod{10}$. $(4, 9) = 1$ és $\varphi(4) = 2$, így még egyszer alkalmazva a tételt: $3^{3^{97}} \equiv 3^{3^{17}} \pmod{10}$. Ez pedig már kiszámolható, és így

$$13^{11^{97}} \equiv 3^{3^{17}} \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10},$$

azaz az utolsó jegy 7.