

1. Lásd 9.6.
2. Lásd 9.8.
3. NP-teljes. A tanú világos. A Hamilton-kör keresés kérdését lehet erre visszavezetni. Ha G egy gráf, amiben az a kérdés, hogy van-e benne Hamilton-kör, akkor ebből le kell gyártanunk egy *összefüggő* H gráfot és egy k számot, amelyekre az a kérdés, van-e H -ban legalább k méretű kör. G nem feltétlenül összefüggő, akkor persze nincs is benne Hamilton-kör, de ettől még le kell gyártani egy H gráfot; G komponensei felismerhetők polinom időben, és össze lehet őket kötni egy feszítőfa mentén, így az eredeti komponenseken kívüli kör nem keletkezik (tehát speciálisan Hamilton-kör sem), de a gráf összefüggő lesz. Legyen tehát H ez a gráf és k a csúcsainak száma. Nyilván G -ben pontosan akkor van Hamilton-kör, ha H -ban legalább k élű kör (mert az is csak Hamilton-kör lehet).
4. Ezt nem tudom. Amikor kitűztem, akkor elnéztem, azt hittem, tudok rá polinom idejű algoritmust, de mégsem. Bocs.

5. Beszúrásos rendezéssel:

```

4
4, 11
4, 9, 11
4, 9, 10, 11
4, 5, 9, 10, 11
4, 5, 6, 9, 10, 11
4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
1, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11
1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 16

```

Összefésüléses rendezéssel:

```

4      } 4,11      }
11     }           } 4,9,10,11
9      } 9,10     }
10     }           }
5      } 5,6      } 1,4,5,6,8,9,10,11
6      }           }
8      } 1,8      }
1      }           } 1,2,4,5,6,8,9,10,11,16
2      } 2,16     }
16     }           }

```

6. A feladat szövegezése nem egyértelmű; egyrészt nem világos, hogy a beszúrásos rendezésnél a lista hossza annyi, ahány lépést végeztünk, vagy a maradék, még rendezetlen lista a rendezett rész végéhez van fűzve, illetve az összefésülésesnél egy lépés az két részlista összefésülése vagy az összes, egy szinten lévő lista összefésülése egyszerre.
 - (a) Nem egyértelmű, hogy a lista hossza annyi, ahány lépést végeztünk, vagy a maradék, még rendezetlen lista a rendezett rész végéhez van fűzve. Előbbi esetben nyilván nem jöhetett ki, mert 8 hosszú lista csak a rendezés végén lenne, de a megadott lista nem rendezett. A másik esetben sem jöhetett ki; két lépés után $(4, 6, 8, 3, \dots)$ áll, három lépés után pedig a 3-ast beszúrjuk az elejére, és már később sem kerül vissza a 6-os mögé.
 - (b) Buborékrendezéssel kijöhetett: megcseréljük a 4-est a 6-ossal, majd a 6-os a helyén marad, megcseréljük a 8-ast a 3-assal, és éppen a kérdéses sorozatnál tartunk.

- (c) Összefésüléses rendezésnél az első szinten összefésüljük a 4-est a 6-ossal, a 8-ast a 3-ossal, a 7-est a 2-essel és az 5-öst az 1-essel. Ha úgy értelmezzük, hogy ezeket egyszerre megcsináljuk, akkor ez után már nem jöhet ki a kérdéses állapot, mert pl. az 1-es az 5-ös elé kerül; ha egyesével csináljuk őket, akkor az első kettő összefésülése után éppen az jön ki, aminek kell.
7. Radix rendezés nem volt előadáson, úgyhogy ez nem kell. Bocs.
8. Először is: az első és második elem összehasonlításával eldönthető, hogy a sorozat az elejétől kezdve nő vagy csökken. Ezután lényegében összefésülést csinálunk: úgy tekintjük, hogy a sorozat az elejétől kezdve illetve a végétől visszafelé két, már rendezett sorozatot alkot, és ezeket összefésüljük. Persze nem tudjuk, hogy a két sorozat hol találkozik, de az összefésüléshez nem kell a sorozatok vége, mindig csak az eleje. Így két, összesen n hosszú listát fésülünk össze, ami megvan $O(n)$ időben. A kapott sorozat vagy jól, vagy fordítva rendezett, de nyilván n időben meg is lehet fordítani, ha kell.
9. $2304 = 2^8 \cdot 3^2$, $1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43$. Innen $(2304, 1032) = 2^3 \cdot 3 = 24$. Másrészt:
- $$\begin{aligned} 2304 &= 2 \cdot 1032 + 240 \\ 1032 &= 4 \cdot 240 + 72 \\ 240 &= 3 \cdot 72 + 24 \\ 72 &= 3 \cdot 24 + 0 \end{aligned}$$
- Innen ugyancsak $(2304, 1032) = 24$.
10. $1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43$, innen $\varphi(1032) = 1032 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{42}{43} = 336$ és $d(1032) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$.
11. Pontosán azok a családok kapnak páratlan sok ajándékot, akiknek a háza sorszámanak páratlan sok osztója van. $d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, ha n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. $d(n)$ pontosan akkor páratlan, ha minden tényező páratlan, azaz minden α páros. De ez azt jelenti, hogy n négyzetszám, mert $n = (p_1^{\alpha_1/2} p_2^{\alpha_2/2} \cdots p_k^{\alpha_k/2})^2$. Tehát azok kapnak páratlan sok ajándékot, akik négyzetszám sorszámu házban laknak. $400 = 20^2$, így 400-ig 20 négyzetszám van, azaz 20 család kap páratlan sok ajándékot.
12. $n^7 + 20n = n(n^6 + 20n)$. Ha $7|n$, akkor a szorzat osztható 7-tel, míg ha nem, akkor $(7, n) = 1$ (mert 7 prím), így alkalmazhatjuk az Euler–Fermat-tételt ($m = 7, a = n$ -nel; $\varphi(7) = 6$): $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$, innen $n^6 + 20 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$, azaz $n^6 + 20$ osztható 7-tel. $n^7 + 20n$ mindkét esetben osztható 7-tel.
13. Egy p elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^p , valódi részhalmazainak száma $2^p - 2 = 2(2^{p-1} - 1)$. Ha $p = 2$, akkor persze teljesül, hogy $2|2^2 - 2 = 2$. Ha $p \neq 2$ prím, akkor p páratlan, így $(p, 2) = 1$, és p -re alkalmazva az Euler–Fermat-tételt ($\varphi(p) = p \cdot \frac{p-1}{p} = p-1$, ha p prím), azt kapjuk, hogy $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, azaz $p|2^{p-1} - 1$, tehát a szorzat ekkor is osztható p -vel.