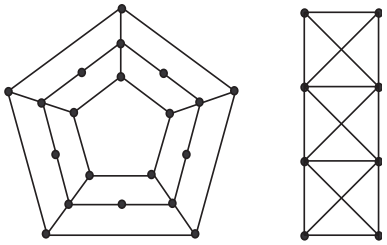
Számítástudomány alapjai
6. gyakorlat, megoldások
2005. 10. 27.

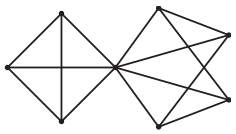
1. Mindkettő kétszeresen összefüggő.





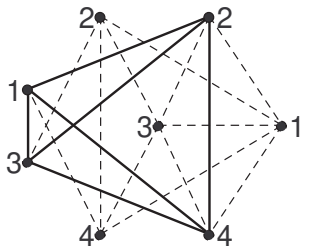
Egy csúcs elhagyása esetén nem esnek szét; a baloldali gráfban lényegében csak 4-féle különböző csúcs van (kívül egy, középen kettő, belül egy), bármelyiket is hagyjuk el, a gráf összefüggő marad. A jobboldali gráfban kétféle csúcs van, ezek egyikének elhagyása esetén sem esik szét. Az előbbiek miatt legalább kétszeresen összefüggőek. Két csúcsot viszont már el lehet hagyni úgy, hogy szétessenek; a baloldali gráfban egy másodfokú csúcs két szomszédját, a jobboldali gráfban pl. a második sor két csúcsát lehet elhagyni úgy, hogy két komponensre essen szét.

2. Egyszeresen összefüggő, mivel a középső csúcsot elhagyva szétesik. Háromszorosan élösszefüggő. A gráf tulajdonképpen két gráfból áll össze, melyeknek egy csúcsa közös; a baloldali, $K_4$ háromszorsoan élösszefüggő, és a jobboldali is az (ezt esetvizsgálattal lehet meggondolni), így az egész gráf is az.



3. Menger tétele miatt bármely két csúcs között van három csúcsdiszjunkt út. Vegyünk két csúcsot és a köztük vezető három utat. Ezek közül vagy legalább kettő páros hosszú, vagy legalább kettő páratlan hosszú. Mindkét esetben a két azonos paritású utat összerakva egy páros hosszú kört kapunk.

4. 4 színnel színezhető az ábra szerint, és van benne 4 csúcsú klikk is, ezt a megvastagított élek mutatják, tehát 4 szín kell is. Így $\chi = 4$.

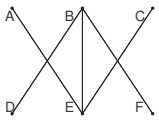


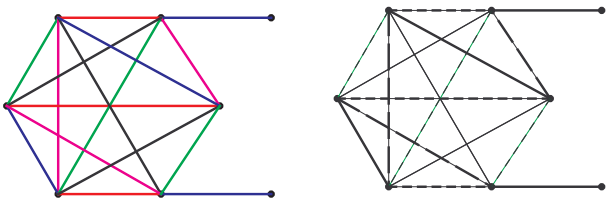

5. Hagyjuk el a $v$ csúcsot. Minden páratlan kör átment $v$-n, így a gráfban nem maradt páratlan kör, tehát a maradék páros gráf, ami két színnel színezhető. $v$ megkaphatja a harmadik színt, és ezzel kiszíneztük a gráfot három színnel.

6. A színezés éppen a gráf független ponthalmazokra való felbontás. $\alpha(G)$ definíciója miatt minden színosztály mérete $\leq \alpha$, van belőlük $\chi$ darab, tehát összméretük $\leq \chi\alpha$. De együtt az összes csúcsot tartalmazzák, összméretük $n = |V(G)|$ és így $\alpha(G)\chi(G) \geq |V(G)|$.

7. A gráf páros, kromatikus száma 2. Ha a csúcsokat $A, B, C, D, E, F$ sorrendben színezzük mohón, akkor $A, B$ és $C$ az 1-es színt kapja, $D, E, F$ pedig a 2-est, tehát ekkor a mohó algoritmus optimálisan színezést ad. Ha azonban az $A, C, D, F, B, E$ sorrendben színezünk,

akkor az első 4 csúcs mind 1-es színű lesz, mert egyik sincs összekötve a korábbiakkal, $B$ 2-es és $E$ 3-as, ez rosszabb, mint az optimális.




8. $\Delta = 5$, így $\chi_e$ értéke 5 vagy 6. 5 színnel színezhetőek az élek, így $\chi_e = 5$. (Az ábrán ugyanaz a színezés van egyszer tényleg színekkel, egyszer pedig különböző vastagságú/szaggatott vonalakkal jelölve a megfelelő élek színét.)