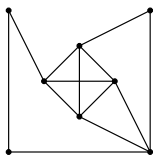
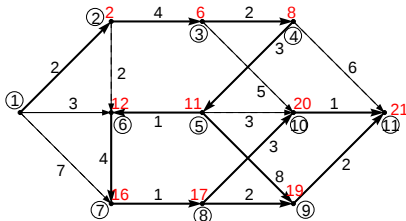


1. Az eredeti G gráfnak van $\leq k$ csúcsa, amit elhagyva szétesik; az új gráfból ezeket és az új csúcsot elhagyva a gráf szétesik, tehát $\leq (k + 1)$ -szeresen összefüggő. Másrészt ha csak legfeljebb $\leq k$ csúcsot hagyunk el, akkor két eset van: az új csúcsot vagy elhagyjuk, vagy nem. Ha nem, akkor a gráf mindenképpen összefüggő marad, mert az új csúcsból az összes többi csúcsba menő élek összetartják a gráfot. Ha elhagytuk, akkor a régi csúcsok közül $\leq (k - 1)$ -et hagyunk el, így a gráf összefüggő marad, mivel az eredeti gráf $\geq k$ -szorosan összefüggő volt.
2. Keressünk a gráfban független ponthalmazt. A pontok helyzete szimmetrikus, így bármelyik csúcsból kiindulhatunk. Nézzük meg, mely csúcsokat vehetjük még hozzá úgy, hogy a pontok függetlenek maradjanak. A 4 szomszédja kiesik, marad a 3 szemközti csúcs, amik viszont háromszöget alkotnak, így azok közül csak egyet lehet kiválasztani. Innen $\alpha \leq 2$; két független csúcsot ki is lehet választani, pl. két szemközti, így $\alpha = 2$. Innen $\chi \geq \frac{n}{\alpha} = \frac{8}{2} = 4$, másrészt 4 színnel színezhető is, az átellenes csúcsok kaphatnak azonos színt, így a 8 csúcs 4 színnel színezhető. Tehát $\chi = 4$.
3. A gráf nem síkbarajzolható; íme egy K_5 -tel topologikusan izomorf részgráf. A középső négy csúcs K_4 -et alkot, a jobb alsó csúcs kettővel közvetlenül, kettővel pedig kettő hosszú úton keresztül van összekötve.

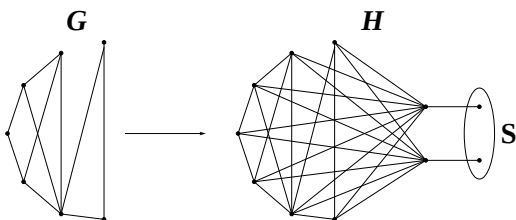


4. A csúcsokra írt bekarikázott számok a sorszámok, a karikázatlanok a szükséges idők. Az összes szükséges idő 21. A kritikus tevékenységeket vastag élek jelzik (a nem kritikusakat pedig a szaggatottak).



5. NP-teljes. A tanú nyilvánvaló. Az $S \subseteq A$ egy nagyon erős megkötés a gráf szerkezetére. Ha például A 2 elemű, akkor a feszítőfa csak úgy nézhet ki, hogy egy Hamilton-út, aminek a két végpontja A két eleme. Persze ha a Hamilton-utat szeretnénk erre visszavezetni, akkor nem ilyen egyszerű a helyzet, mert ott nincs kijelölve két végpont, míg nekünk kéne.

Egy lehetséges visszavezetés a következő: a G gráfot (melyben Hamilton-út létezése a kérdés) „lezárjuk” két új csúccsal, melyeket az összes régivel összekötünk, majd még egy-egy új csúcsot bekötünk hozzájuk. Ez az utolsó kettő lesz az S halmaz (a kapott gráf pedig H).



Ha G -ben van Hamilton-út, akkor H -ban van olyan feszítőfa, melynek két elsőfokú csúcsa a két kijelölt csúcs (= olyan Hamilton-út, melynek két végpontja a két kijelölt csúcs), mert a G -beli Hamilton-út akárhol is végződik, meghosszabíthatjuk a két-két új csúccsal. Fordítva, ha az új gráfban van olyan feszítőfa, melynek két elsőfokú csúcsa S -beli, akkor ennek elhagyva a végéről a két-két új csúcsot, az eredeti gráf egy Hamilton-útját kaptuk.

6. P -beli. Az a kérdés, van-e olyan feszítőfa, amiben az S -beli csúcsok mind elsőfokúak. Azaz van-e G -nek olyan feszítőfája, amiben a $G \setminus S$ -beli csúcsokon a feszítőfa akárhogyan kinézhet, de az S -beli csúcsok mind elsőfokúak, azaz $G \setminus S$ -be vannak bekötve. Ez ellenőrizhető polinom időben: azt kell megnézni, hogy $G \setminus S$ összefüggő-e, és azt, hogy fut-e minden S -beli csúcsból él $G \setminus S$ -be, ez utóbbi is nyilván polinom időben megoldható. Ha mindkettőre igen a válasz, akkor van ilyen feszítőfa, ha valamelyikre nem, akkor nincs.

7. $\varphi(40) = 16$, $\varphi(16) = 8$. $(123, 40) = 1$, $(83, 16) = 1$. Ezek alapján redukálhatjuk a hatványban szereplő számokat: $123 \equiv 3 \pmod{40}$, $83 \equiv 3 \pmod{16}$, $9 \equiv 1 \pmod{8}$, innen $123^{83^9} \equiv 3^{3^1} \equiv 27 \pmod{40}$.

8.

$$12x \equiv 35^{81} \cdot 18^2 \pmod{44}$$

$(12, 44) = 4 \mid 35^{81} \cdot 18^2$, így mindhárom tagot leosztjuk 4-gyel. $(35^{81} \cdot 18^2 / 4 = 35^{81} \cdot 9^2)$

$$3x \equiv 35^{81} \cdot 9^2 \pmod{11}$$

A jobboldalon álló számot egyszerűsítjük. $35 \equiv 2 \pmod{11}$, és $(35, 11) = 1$ miatt a kitevőt is redukálhatjuk. $\varphi(11) = 10$, $81 \equiv 1 \pmod{10}$, azaz

$$3x \equiv 2^1 \cdot 9^2 \equiv 2 \cdot 81 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{11}.$$

A 8, 19, 30, 41, ... számok közül a 30 osztható 3-mal, innen a megoldás

$$x \equiv 10 \pmod{11},$$

visszaírva az eredeti kongruenciába:

$$x \equiv 10, 21, 32, 43 \pmod{44}.$$