Számítástudomány alapjai
12. gyakorlat
2004. 12. 02.

1. Döntsük el, hogy megoldhatóak-e az alábbi kongruenciák, és a megoldhatóakat oldjuk meg.
   (a) $3x \equiv 5 \pmod 7$
   (b) $14x \equiv 8 \pmod{21}$
   (c) $11x \equiv 12 \pmod{18}$
   (d) $9x \equiv 24 \pmod{96}$
   (e) $ax \equiv 5 \pmod{35}$, ha $a = 5$, 6 vagy 7,
   (f) $ax \equiv 3 \pmod{21}$, ha $a = 6$, 7 vagy 8,
   (g) $ax \equiv b \pmod{12}$, ha $a = 4$ vagy 5, $b = 2$ vagy 3.
2. Határozzuk meg az összes 1000-nél kisebb n egész számot, melyre $d(n) = 9$.
3. Keressük meg az alábbi egyenletek megoldásait (ha léteznek) az egész számok körében.
   (a) $71x - 47y = 1$
   (b) $13x + 58y = 41$
4. Határozzuk meg 303^{404} utolsó két számjegyét.
5. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.
   (a) $5x \equiv 61 \pmod{444}$
   (b) $202x \equiv 157 \pmod{203}$
6. Igazoljuk az Euler-Fermat–tétel segítségével, hogy $4^{24} - 3^{24}$ osztható 35-tel.
7. Bizonyítsuk be, hogy $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel, ha n tetszőleges egész szám.
8. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket úgy, hogy visszavezetjük őket páronként relatív prím modulusú rendszerre.
   (a) $x \equiv 5 \pmod 6$, $x \equiv 3 \pmod{10}$, $x \equiv 8 \pmod{15}$,
   (b) $x \equiv 4 \pmod 6$, $x \equiv 2 \pmod{10}$, $x \equiv 10 \pmod{15}$,
   (c) $x \equiv 2 \pmod 6$, $x \equiv 8 \pmod{10}$, $x \equiv 13 \pmod{15}$,
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímre $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$. (Neve is van: ez a Szegény ember binomiális tétele.)

*1. Mi az utolsó számjegye $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$-nek? És az utolsó előtti?