Számítástudomány alapjai
11. gyakorlat megoldások

1. Lásd az előző feladatsor megoldásai között.

2. Lásd az előző feladatsor megoldásai között.

3. (a) Prímtényezős felbontásból:
$1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13, 6084 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2 \Rightarrow (1560, 6084) = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 156$
Euklideszi algoritmussal:
$6084 = 1560 \cdot 3 + 1404$
$1560 = 1404 \cdot 1 + 156$
$1404 = 156 \cdot 9 + 0$
Így $(6084, 1560) = (1560, 1404) = (1404, 156) = (156, 0) = 156$

(b) Prímtényezős felbontásból:
$572 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13, 6375 = 3 \cdot 5^3 \cdot 17 \Rightarrow (572, 6375) = 1$
Euklideszi algoritmussal:
$6375 = 572 \cdot 11 + 83$
$572 = 83 \cdot 6 + 74$
$83 = 74 \cdot 1 + 9$
$74 = 9 \cdot 8 + 2$
$9 = 2 \cdot 4 + 1$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$
Így $(6375, 572) = (572, 83) = (83, 74) = (74, 9) = (9, 2) = (2, 1) = (1, 0) = 1$

(c) Prímtényezős felbontásból:
$7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11, 24375 = 5^4 \cdot 3 \cdot 13 \Rightarrow (7425, 24375) = 3 \cdot 5^2 = 75$
Euklideszi algoritmussal:
$24375 = 7425 \cdot 3 + 2100$
$7425 = 2100 \cdot 3 + 1125$
$2100 = 1125 \cdot 1 + 975$
$1125 = 975 \cdot 1 + 150$
$975 = 150 \cdot 6 + 75$
$150 = 75 \cdot 2 + 0$
Így $(24375, 7425) = (7425, 2100) = (2100, 1125) = (1125, 975) = (975, 150) = (150, 75) = (75, 0) = 75$

4. Lásd a következő feladatsor megoldásai között.

5. Egy n szám osztóinak száma $d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1)$, ahol n prímtényezős felbontása $\prod_i p_i^{\alpha_i}$.
Ha egy n szám osztóinak száma osztható 11-gyel, azaz $11 | \prod_i (\alpha_i + 1)$, akkor van olyan i, melyre $11 | \alpha_i + 1$, hiszen a 11 prím. (Ha egy prím oszt egy szorzatot, akkor annak valamelyik tényezőjét is osztja.) Ekkor $\alpha_i \geq 10$ és ha a hozzá tartozó p_i prím akár csak 2 is, a száma akkor is legalább $2^{10} = 1024 > 999$. Tehát a szám nem lehet háromjegyű.

6. $(a, b) = 12 = 2^2 \cdot 3$, $[a, b] = 240 = 2 \cdot 3 \cdot 5,$.
Ha az a-ban a 2 α, b-ben β hatványon van, akkor a legnagyobb közös osztóban a 2 $\min(\alpha, \beta)$, a legkisebb közös osztóban $\max(\alpha, \beta)$ hatványon van, így α és β közül az egyik 1, a másik 2. Hasonlóan az 5 az egyik számban 0, a másikban 1 hatványon

szerepel, míg a 3 mindkét számban első hatványon van. Ezek alapján a és b a következő lehet.

$a:$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3$
$b:$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 5$

7. $\varphi(2p^2) = \varphi(2) \cdot \varphi(p^2)$, mert $p > 2$.
   $\varphi(2) \cdot \varphi(p^2) = 1 \cdot (p^2 - p)$, mert p prím.
   $1 \cdot (p^2 - p) = p(p-1)$

8. X részhalmazainak száma 2^p , hiszen egy részhalmazba vagy beveszek egy adott X-beli elemet vagy nem, és ezt p elem esetén kell eldöntenem. Ebből levonva X nem valódi részhalmazainak számát, azaz 2-őt, megkapjuk, hogy X valódi részhalmazainak száma $2^p - 2$. Mivel p prím, így a kis-Fermat tétel miatt p osztja a $2^p - 2$-t. (kis-Fermat-tétel: Ha p prím és a tetszőleges természetes szám, akkor $p|a^p - a$.)

9. Ha n prím, akkor $d(n) = 2$, $2d(n) = 4$. Nézzük meg, hogy milyen n prímekre igaz, hogy $d(n+1) \geq 4$, hiszen ezekre igaz lesz a $d(n+1) \geq 2d(n)$ egyenlőtlenség. Ha $n \neq 2$, akkor $2|n+1$ és $2 < n+1$ miatt $n+1$ nem prím, tehát $n+1$-nek vagy van legalább 2 különböző prímosztója (p és q) vagy $n+1$ prímhatvány (p^α). Az első esetben $n+1$-nek biztosan van legalább 4 osztója: 1, p, q és pq. A második esetben $2|n+1$ miatt $p = 2$ és ha $n \neq 1, 3$, akkor $\alpha \geq 3$, így ebben az eseben is van $n+1$ legalább 4 osztója: 1, 2, 4, 8.
   Tehát ha $n \neq 2, 3$ és n prím, akkor $d(n+1) \geq 2d(n)$. Ez végtelen sok száma, hiszen prímből végtelen sok van, így ha 2-őt elhagyunk, akkor is végtelen sok marad.