Számítástudomány elemei
10. gyakorlat megoldásai

1. (a) Elöször lefuttatom a teljes gráfra, hogy lássam van-e, ha nincs akkor válasz, hogy nincs. Ha van, akkor elkészítem a pontok egy sorrendjét. Majd ezen sorrend szerint halad az algoritmus. Legyen G a gráf, és v az éppen soron következő csúcs. Lefuttatom S-et G
   v-vel és k-val. Ha ebben van k független pont, akkor v-re nincs szükségem, $G = G$
   v-vel folytatom az eljárást, és veszem a következő csúcsot, ha nem volt benne, akkor v-re szükségem, ezért megjelölöm, és benne hagyom a gráfban, és így folytatom a következő csúccsal. Az eljárás végére marad k jelölt csúcsom, melyek független pontok. Ez alatt n-szer hivtam S-t (minden csúcshoz egyszer), ami polinomja az inputnak.

   (b) Az elözőtől annyi az eltétés, hogy itt a gráf méretétől függ, hogy mekkora független ponthalmazt keres, így amikor csökkentem a gráf méretét csökkenhet keresett ponthalmaz mérete is, viszont nekem az eredeti gráf pontjainak a feléből kell a független ponthalmaz. Ezért törlés helyett úgy érem el, hogy ne számíthason bele a független ponthalmazba, hogy az épp aktuális v-t összekötőm az összes többi csúccsal. Ha az így lefuttatás után még van a gráfban $\frac{n}{2}$ méretű független ponthalmaz, akkor az éleket behúzva hagyom, ha nincs akkor az új éleket törlöm, és a csúcsot megjelölöm. Majd ugyanezt folytatom a következő csúccsal. Így a végén ugyanúgy kapok $\frac{n}{2}$ független pontot.

2. **Tétel 1** *Egy gráf két színnel szinezhetősége P-beli probléma*

   G-t három pont hiján két színnel kell szinezni, ezt a három pontot $\binom{n}{3}$ féleképp választhatom ki, ahol n a csúcsok száma. Az a három pont csak akkor nem szinezhető ki két színnel, ha K_3-t alkott, ennek ellenőrzése, bármely 3 pontról legfeljebb $3e$ lépés, ahol e az élek száma. Tehát ha nézem az összes 3 pontra, hogy a gráfból kihagyva 2 színnel szinezhető-e, illetve, hogy a 3 pont nem-e K_3, ez legfeljebb $\binom{n}{3} \cdot p \cdot 3e$, ahol p a maradék gráf két színnel szinezhetőségének az eldöntésére szolgáló lépésszám, ami polinomja n-nek és e-nek.Így az össz lépésszám is polinomja lesz n-nek, e-nek.

3. **Tétel 2 (Tanú)** *Egy probléma pontosan akkor NP-beli, ha eldöntésére adható egy olyan példa, súgás, mely helyességének ellenőrzése polinom számú lépést igényel.*

   Tétel 3 *Három színnel színezése eldöntése NP-teljes.*

   Ez a probléma NP-teljes, ehhez két dolog kell: NP-beli, illetve NP-nehéz.

   NP-beliséget, a Tanú-tétel igazolja: ha valaki mutat egy színezést, csak végig megyek az éleken és ellenőrzöm a helyességét, illetve hogy, x és y különböző színű. NP-nehézséget úgy látjuk be, hogy egy már ismert NP-teljes problémát visszavezetünk rá. Ez eseteben ez a probléma a három színnel színezés. Adott egy H gráf, és kérdés színezhető-e 3 színnel. G legyen H, és x, y legyen H-nak egy éle, ez a felépítés polinom lépésben megy. H pontosan akkor színezhető 3 színnel, ha G és x, y különböző színű. Hiszen jó ugyanaz a színezés, és mivel x, y szomszédos, ezért bármely jó színezésben különböző színűek.

4. G síkgráf, ezért benne a maximális klikk legfeljebb 4, tehát ha $k > 4$, akkor a válasz nem. Ha $k \leq 4$, akkor polinom számú lépésben eldöntjük. Veszük, az összes pont

k-ast, és meg nézzük klikk-e. Pont k-asból $\binom{n}{k}$ van, egy k-asról eldönteni, hogy klikk-e legfeljebb $\binom{k}{2}e$ lépés, ez összesen legfeljebb $\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{2} \cdot e \leq c \cdot n^4 \cdot e \qquad k \leq 4$ miatt, tehát polinom számú lépés.

5. **Tétel 4** *Hamilton-út keresése NP-telejs.*

   NP-teljes feladat. Jó tanú, egy ilyen kör, megnézem a pontokat, hogy mindegyik pontosan egyszer szerepel és kört alkot, illetve e is fel lett használva. H gráfban van-e Hamilton-út problémát erre visszavezetjük, legyen G H plusz két csúcs, amit összekötök egymással, és az összes többivel, a köztük lévő legyen e, ez a felépítés polinom lépésszámú. Ha G-ben van e-n átmenő Hamilton-kör, akkor a két plusz csúcsot törölve kapok H-ban egy Hamilton utat, és fordítva, ha van H-ban egy Hamilton-út, hozzáadva a két csúcsot, lesz egy e-n átmennő Hamilton-kör.

6. Ez a feladat P-beli, törlöm e-t, csinálok egy bejárást e egyik végpontjából, ha ebben a másik végpontja szerepel, pontosan akkor van G-ben, e-n átmenő kör.

7. Ez teljesen hasonló a 3. feladathoz. De itt ha adott egy G, akkor hozzá H-t úgy csináljuk, hogy x, y legyen G egy v pontjának meg duplázása, vagyis v-t lecserélem x-re, és berakom y-t, hogy összekötöm v összes szomszédjával (így x és y nem lesz szomszédos). G egy jó színezéséből törölve y-t H egy jó színezését kapom, H egy jó színezéséhez y-t hozzáadva v színével G jó színezését kapom.

8. (a) **Tétel 5** *Hamilton-kör keresése NP-teljes.*

   Ez NP-teljes, jó tanú egy kör, megnézem minden pont legfejebb egyszer szerepel, valóban kör, és k hosszú. Adott m pontú H gráf, hogy van-e benne Hamilton-kör, legyen hozzá a mi G gráfunk H egymás mellé lerakva 5 példányban, hogy az egyik pont 5 példánya fát alkosson (így ha H összefüggő, G is az), legyen $k = m$, ez a felépítés polinom lépéssel megy, hisz csak 5-szörös szorzót kap. Így G-ben kör csak H egy példányvan lehet (nem lehet olyan köre, mely H több példányát is érinti). Ha G-ben van pontosan k hosszú kör, akkor ez egy H példányban van, de az k pontból áll, Így az abban a példányban Hamilton-kör, vagyis van H-ban Hamilton kör. Ha H-ban van Hamilton kör, akkor G-ben van pontosan k hosszú kör.

   (b) Ugyanaz, mint az előzö, hisz ha G-ben van kör, akkor az csak egy H példányban lehet, de H k pontú, így ha ez a kör legalább k, hosszú, akkor pontosan, hisz legfeljebb k pontot érinthet. Ha H-ban van Hamilton-kör, akkor G-ben van k hosszú, ami legalább k.