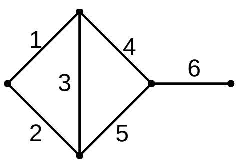
Számítástudomány alapjai
9. gyakorlat feladatainak megoldása

1. C a körmátrix (oszlopok az élek, sorok a körök), Q a vágásmátrix (oszlopok az élek, sorok a vágások).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



2. Beszúrásos rendezésnél meg kell találni a soron következő elem helyét az addig rendezett listában. Ezt lehet lineáris vagy bináris kereséssel, de ez azon nem változtat, hogy hová szúrjuk be az elemet.

4									
4,	11								
4,	9,	11							
4,	9,	10,	11						
4,	5,	9,	10,	11					
4,	5,	6,	9,	10,	11				
4,	5,	6,	8,	9,	10,	11			
1,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	11		
1,	2,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	11	
1,	2,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	11,	16

Összefésüléses rendezéssel:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}4\\11\end{array}\right\}4{,}11\\ \left.\begin{array}{l}9\\10\end{array}\right\}9{,}10\end{array}\right\}4{,}9{,}10{,}11\\
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}5\\6\end{array}\right\}5{,}6\\ \left.\begin{array}{l}8\\1\end{array}\right\}1{,}8\end{array}\right\}1{,}5{,}6{,}8
\end{array}\right\}1{,}4{,}5{,}6{,}8{,}9{,}10{,}11\\
\left.\begin{array}{l}2\\16\end{array}\right\}2{,}16 \quad 2{,}16 \quad 2{,}16
\end{array}\right\}1{,}2{,}4{,}5{,}6{,}8{,}9{,}10{,}11{,}16$$

3. $n-1$ összehasonlítással meg lehet találni a legkisebb elemet. Vegyük sorban az elemeket, az első kettőt összehasonlítjuk, a kisebbiket megtartjuk és összehasonlítjuk a következővel, ezek közül megint a kisebbiket tartjuk meg és így tovább. Így a végén $n-1$ mérés után a legkisebb elem marad meg.

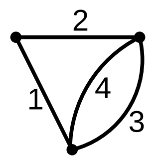
$n-1$-nél kevesebb összehasonlítás nem elég, ez pl. abból látszik, hogy nekünk $n-1$ elem mindegyikéről meg kell mutatnunk, hogy nem a legkisebb, de ahhoz, hogy egy elemről biztosan tudjuk, hogy van nála kisebb, kell egy olyan összehasonlítás, amiben ő a nagyobb. Viszont egy összehasonlításban csak egy elemről derül ki, hogy ő a nagyobb, így $n-1$ összehasonlítás kell.

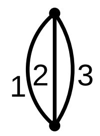
Másképp: egy gráf csúcsai legyenek az elemek és kettő legyen összekötve, ha összehasonlítjuk őket. Az így kapott gráf összefüggő kell, hogy legyen, mert ha lenne két különálló komponens, akkor azokban lehet, hogy külön-külön már megtaláltuk a legkisebb elemeket, de a két komponensbeli elemek egymáshoz való viszonyáról semmit nem tudunk, így azt sem tudjuk, melyik elem az egészben a legkisebb. Ahhoz viszont, hogy egy n csúcsú gráf összefüggő legyen, legalább $n-1$ él kell, ezt már tudjuk.

4. A baloldali mátrix nem áll elő körmátrixként. Tegyük fel ugyanis, hogy igen, és próbáljuk meg a mátrixból rekonstruálni a gráfot. Az 1, 2, 3 élek 3 hosszú kört alkotnak. Az 1, 2, 4 élek szintén kört alkotnak, ez csak úgy lehet, ha a 3-as él párhuzamos a 4-es éllel (baloldali ábra). Ekkor viszont két baj is van: a mátrix harmadik sora szerint az 1, 3, 4 élek kört kellene alkossanak, pedig nem alkotnak, másrészt a 3, 4 élek egy kettő hosszú kört alkotnak, ami nem szerepel a mátrixban. Tehát ilyen gráf nincs.

   A jobboldali mátrix viszont előáll: az 1, 2 élek egy kettő hosszú kört alkotnak, azaz párhuzamos élek. Hasonlóan 1, 3 és 2, 3 is párhuzamos, tehát ha egy gráfnak két csúcsa van, melyek között ez a három él fut, akkor ennek a körmátrixa éppen ez (ez a gráf van a jobboldali ábrán).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





5. (a) Beszúrásos rendezéssel nem állhat elő, mert először beszúrjuk a 6-ot, majd a 4-et, 8-at, és amikor a 3-at szúrjuk be, akkor az a 4-es elé kerül, és onnantól kezdve már ott is marad, tehát az első 4 elem sorrendje 4, 6, 3, 8 nem lehet.

   (b) Buborékrendezéssel előállhat: sorban megyünk a párokon. A 6,4 fordítva áll, tehát megcseréljük őket: (4,6,8,3,7,2,5,1), a 6, 8 jól áll, őket nem cseréljük, marad (4,6,8,3,7,2,5,1), a 8, 3 fordítva áll, őket megcseréljük, és ekkor pont a kérdéses közbülső állapot jött létre: (4,6,3,8,7,2,5,1).

   (c) Összefésüléses rendezéssel is előállhatott: először a 6, 4 egyelemű listákat fésüljük össze, majd a 8, 3 listákat, és ekkor éppen az a sorrend, ami kell.

6. Kiválasztunk az összes lehetséges módon 3 csúcsot G-ből, erre $\binom{n}{3} < cn^3$ lehetőség van (n G csúcsainak száma), és sorban végigmegyünk rajtuk. Egy ilyen hármasról $3(n-1) < cn$ idő alatt meg tudjuk állapítani, hogy független-e (mindhárom csúcsnak végignézzük a szomszédait ($\leq n-1$), hogy szerepel-e köztük a másik két csúcs valamelyike). Ha a hármas független, akkor leállunk, ekkor $\alpha(G) \geq 3$, hiszen találtunk három független csúcsot (lehet, hogy több is van, ez most nem érdekes), ha a hármas nem független, megyünk tovább. Ha végigértünk, és semelyik hármas sem független, akkor $\alpha(G) < 3$. Az algoritmus összesen kevesebb, mint cn^4 idő alatt lefut, tehát polinomrendű.

7. A feladat polinomrendű. Válasszunk ki G-ből minden lehetséges módon 3 csúcsot, és menjünk végig a lehetőségeken (egy hármason belül a sorrend most számít; erre $n(n-1)(n-2) < n^3$ lehetőség van). Az első kettő kapja azt a színt, amiből kettőt lehet felhasználni, a harmadik azt, amiből egyet. Ha az első kettő össze van kötve, akkor lépjünk tovább, ebből már nem lesz jó színezés. Ha az első kettő nincs összekötve, akkor már a két korlátozott színt fel is használtuk, és azt kell ellenőrizni, hogy a maradék gráf kiszínezhető-e két színnel. Ez cn időben eldönthető (2-színezés). Ha színezhető, akkor készen vagyunk, kiszínezhető az egész gráf 4 színnel a feltételeknek megfelelően. Ha nem, akkor lépjünk tovább a következő hármasra. Így végigmegyünk az összes lehetőségen a két korlátozott szín elosztására, és ha egyiknél sem lehet a másik 2 színnel a

maradékot kiszínezni, akkor a gráf nem színezhető ki a feltételeknek megfelelően. Az algoritmus cn^4 idő alatt lefut.

8. Kiindulási sorrend: *abc*, *acb*, *bca*, *bbc*, *acc*, *bac*, *baa*. Háromféle karakter van, ennyi ládát használunk, és három hosszúak a szavaink, ennyiszer kell majd ládarendezést csinálnunk. Először mindenki bekerül az utolsó karaktere szerinti ládába.

bca,baa	*acb*	*abc,bbc,acc,bac*
a	*b*	*c*

Most ebből a sorrendből kiindulva berakunk mindenkit sorban a középső karaktere szerinti ládába, végül az új sorrendből kiindulva az első karakter szerint ládázunk, és az eredmény már a rendezett lista.

baa,bac	*abc,bbc*	*bca,acb,acc*
a	*b*	*c*

abc,acb,acc	*baa,bac,bbc,bca*	
a	*b*	*c*

9. Egy csupa különböző egészekből álló sorozat bitonikus, ha először nő, utána pedig fogy, vagy fordítva: először fogy, utána nő. Például a $(1, 3, 7, 21, 12, 9, 5)$, $(9, 7, 5, 4, 6, 8)$, $(1, 2, 3, 4, 5)$ sorozatok bitonikusak. Egy ilyen sorozatot pl. úgy rendezhetünk, hogy az elejét meg a végét „összefésüljük": úgy kezeljük, mintha lenne egy listánk az elejéről kezdve és egy másik, aminek az eleje ugyanaz, mint a kezdeti listánk hátulról olvasva. Még az elején azt kell eldöntenünk, hogy „melyik irányba" bitonikus a sorozat, azaz befelé haladva nő vagy csökken. Ezt el tudjuk dönteni az első és második elem összehasonlításával (1 lépés). Ezután elindulunk, és a két végéről kezdve összefésüljük a listát a megfelelő irányba (ha pl. az eredeti listánk befelé nő, akkor növekvő sorrendbe).

   A bitonikus sorozat tulajdonképpen két rendezett lista egymás mellé téve, azonos végükkel kifelé. A két széléről indított összefésülésnél nem tudjuk előre szétválasztani a két listát (nem tudjuk, melyik a középső elem), de az összefésüléshez ez nem is kell, mindig csak a soron következő két elem, azaz a lista két széle kell, ami megvan. Így tehát tényleg össze lehet fésülni egy sorozattá. Ez legfeljebb n lépést igényel, majd a végén, ha fordítva van rendezve a sorozat, akkor még ugyancsak n lépéssel megfordíthatjuk, ami összesen $2n + 1 < cn$ lépés.

10. Meghívjuk S-et az egész gráfra, ha nincs benne $\frac{n}{2}$ méretű független halmaz, leállunk.

    Ha van, akkor vesszük sorban G pontjait, és minden pontra beadjuk S-nek azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy az adott pontot összekötjük az összes többivel (amivel még nem volt). Ez azért jó, mert így egy n csúcsú gráfot adtunk be, tehát S azt adja meg, hogy ebben van-e akkora független halmaz, ami nekünk kell, viszont ez a pont biztosan nincsen benne, tehát S lényegében azt állapítja meg, hogy ez a pont benne van-e az $\frac{n}{2}$ méretű független halmazban. Ha S nemet válaszol, akkor benne van, ekkor elhagyjuk a frissen behúzott éleket és ezt a pontot megjelöljük, ha S igent válaszol, akkor ez a pont nem kell a független ponthalmazba, úgyhogy meghagyjuk a behúzott éleket, ezt a pontot „kizárjuk".

    Megyünk tehát sorban a pontokon, közben a gráf változik, illetve meg is jelölünk néhányat a pontok közül. Végül ha befejeztük, akkor a megjelölt pontok éppen egy $\frac{n}{2}$ méretű független halmazt adnak (hiszen eredetileg volt, és semelyik lépésben nem rontottuk el). Összesen S n számú hívásával célt érünk.