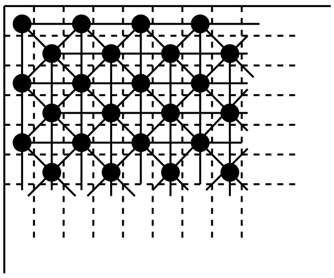
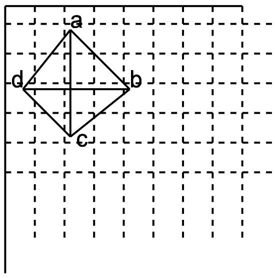
Számítástudomány alapjai
8. gyakorlat megoldások

1. A gráf valahogy úgy néz ki, mint ahogy az baloldali ábrán, csak még a nem bejelölt pontok is alkotnak egy ilyen gráfot. (Ha a táblát sakktáblaszerűen kiszínezzük, akkor él csak azonos színű mezők között fut, így elég csak a fekete mezőket kiszínezni, majd ezt lemásolni a fehérekre.) Az a, b, c és d csúcsok klikket alkotnak, ezért a színezéshez legalább 4 szín kell. Ennyi viszont elég is, mert az alábbi színezés megengedett. (Ha csak a fekete mezőket nézzük, akkor a színezés könnyen ellenőrízhetően jó.)



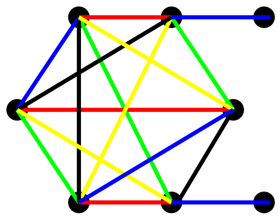


1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	
4	3	3	4	4	3	3	4	4	3	3
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	
3	4	4	3	3	4	4	3	3	4	4
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	
4	3	3	4	4	3	3	4	4	3	3
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	
3	4	4	3	3	4	4	3	3	4	4

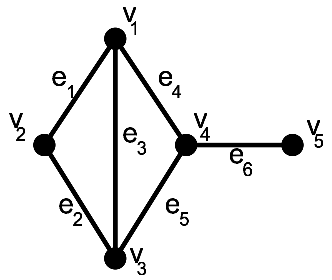
Tehát a gráf kromatikus száma 4.

2. Lásd az előző feladatsor megoldásai között.

3. A gráf élkromatikus száma, az a legkisebb természetes szám, melyre annyi színnel a gráf élei kiszínezhetők, úgy, hogy ha két élnek van közös végpontja, akkor azok különböző színt kapnak.
Tétel: Egy gráf élkromatikus száma Δ vagy $\Delta+1$, ahol Δ a gráf maximális fokszáma. Tehát ezen gráf esetén az élkromatikus szám 5 vagy 6. Az alábbi ábrán egy helyes élszínezés látható 5 színnel, így a gráf élkromatkius száma 5.



4. A gráf:



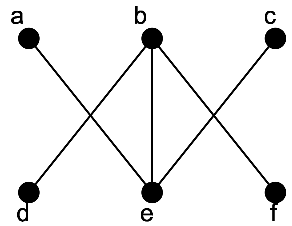
A szomszédossági mátrix: (a sorokat és az oszlopokat is v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 -tel indexelve)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Az illeszkedési mátrix: (a sorokat v_1, v_2, v_3, v_4, v_5-tel, az oszlopokat e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6-tal indexelve)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Mohó algorimus: megyek végig a csúcsokon, és mindig azzal a legkisebb sorszámú színnel színezek, amit az adott csúcs szomszédainál még nem használtam.
Ha a csúcsokat a, b, c, d, e, f sorrendben színezzük, akkor 2 színt használunk. (Az a 1-es színt kap, a b is és a c is, a d 2-est, majd az e és az f is.)
De ha az a, d, b, e, c, f sorrendet választjuk, akkor 3 szín kell. (Az a 1-es színt kap és a d is, a b 2-est, az e 3-ast, majd a c 1-est és az f is.)



6. Egy egyszerű, irányítatlan gráf pontosan akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszúságú kör (tétel). És mivel e szomszédsági mátrix k-adik hatványának (i, j)-edik eleme a i és j csúcsok között futó k hosszú utak száma, speciálisan $i = j$-re az i-n átmenő k hosszú körök száma (ez is tétel), így egy gráfban pontosan akkor nincs páratlan hosszúságú kör, ha szomszedsági mátrixa páratlanadik hatványának diagonális elemei nullák.

7. Vegyük a gráf egy $\chi(G)$ színnel való színezését és húzzuk be az összes élet, ami különböző színű csúcsokat köt össze. A kapott gráf a G'. Ekkor a színezés továbbra is helyes marad, így a gráf kromatikus száma nem változik, $\chi(G) = \chi(G')$. A klikkszáma viszont megnő $\chi(G)$-nyire, hiszen tetszőleges $\chi(G)$ db különböző színű csúcs klikket fog alkotni, $\chi(G') = \omega(G)$.

8. Használjuk fel a 2-es feladat eredményét ($\chi(G)\alpha(G) \geq n$), továbbá, hogy tetszőleges G gráfra ($\bar{G}$-re is) $\chi(G) \geq \omega(G)$ és, hogy $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$!
$\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq \chi(G)\omega(\bar{G}) = \chi(G)\alpha(G) \geq n$

9. Az első gráf esetén a maximális folyam értéke 8, az ábrán egy 8 értékű folyam és egy 8 értékű vágás látható. A második gráf esetén a maximális folyam értéke 12, az ábrán egy 12 értékű folyam és egy 12 értékű vágás látható.