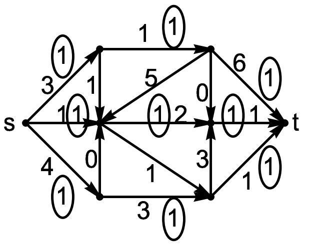
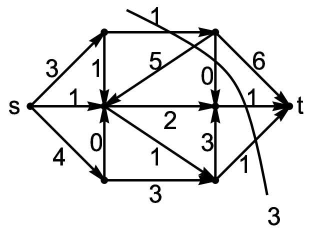
Számítástudomány alapjai
7. gyakorlat megoldások

1. Algoritmus: Keresünk egy megengedett folyamot, majd segédgráf segítségével javító utat keresünk és javítunk, addig, amíg lehet. Ha már nincs javító út, akkor a kapott folyam maximális.
Vagy: Ha szerencsénk van és véletlenül találunk egy maximális folyamot, akkor már csak be kell látni, hogy ennél nincs jobb. Ezt megtehetjük úgy, hogy felrajzoljuk a segédgráfot és megmutatjuk, hogy nincs benne s-ből t-be irányított út. Vagy pedig mutatunk egy ugyanolyan értékű vágást, mint amennyi a folyamunk értéke, ekkor Ford-Fulkerson tétel (=a maximális folyam és a minimális vágás mindig egyenlő) nem lehet ennél nagyobb folyam.

   1.megoldás: Az első ábrán egy megengedett folyam látható, de nem biztos, hogy ez a maximális. Balra tőle a segédgráf látható. (Segédgráf: csúcsai: mint az alapgráf csúcsai; élei: i-ből j-be vezet él, ha az i-ből j-be vezető élen nem használtuk ki az összes kapacitást vagy ha az j-ből i-be vezető élen javítás úgy történik, hogy nem 0 egységet használunk.) A segédgráfban van benne s-ből t-be út, így azon javíthatunk. A javítás mértéke 1 egység. A javítás úgy történik, hogy azokon az éleken, amelyeket azért húztunk be, mert nem használtuk rajtuk az összes kapacitást, növelünk, azokon az éleken pedig, amelyneket azért húztunk be, mert nem 0 kapacitás ment rajtuk, csökkentünk. Az új folyamhoz tartozó segédgráfban nincs s-ből t-be út, mert ez csak az x-ből t-be vezető éllel végződhetne, de x-be nem vezet él. Így a folyamunk maximális.

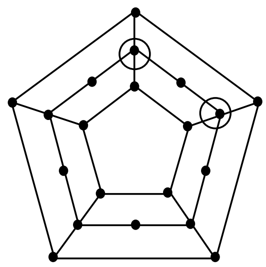
   2. megoldás: Íme egy 3 értékű folyam és egy 3 értékű vágás, tehát a maximális folyam 3. (Vágás: a gráf csúcsainak olyan kettéosztása, melynél s és t különböző részbe kerül. Vágás értéke: az előre mutató élel súlyösszege.; A bekarikázott számok a használt kapacitások, ahol nincs ilyen, ott 0-t használunk.)

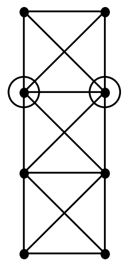




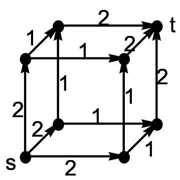
2. Definíció: Egy gráf legalább k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges $(k-1)$ pontját elhagyva a gráf összefüggő marad.
Definíció: Egy gráf legfeljebb k-szorosan összefüggő, ha van k db olyan pontja, melyeket elhagyva a gráf két részre esik.
Definíció: Egy gráf k-szorosan összefüggő, ha legalább k-szorosan összefüggő és legfeljebb k-szorosan összefüggő. Azaz van k db olyan pontja, melyeket elhagyva a gráf két részre esik, de tetszőleges $(k-1)$ pontját elhagyva a gráf összefüggő marad.

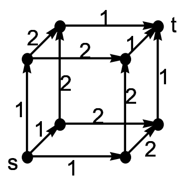
Az első gráf a két bekarikázott pont elhagyásával két részre esik. De ha a gráfnak tetszőleges, de csak egy csúcsát hagyjuk el, akkor a gráf összefüggő marad (ehhez elég megvizsgálni a bekeretezett pontokat, hiszen a gráf többi pontja ezek egyikével "azonos helyzetben van"). A második gráf is kétszeren összefüggő, és az indoklás is megegyezik az előző esettel.



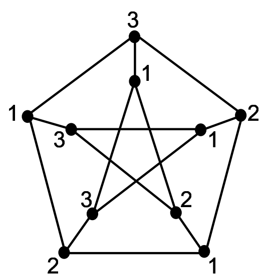


3. A maximum 6, mert: Ha a gráf élein a kapacitásokat a bal oldali ábra szerint osztjuk el, akkor a maximális folyam értéke 6 (minden élen a ráírt kapacitást használva). Ennél többet a kapacitások tetszőleges elosztása esetén sem érhetünk el, hiszen az s-ből kiinduló 3 élen 2-2 egységnél többet nem indíthatunk el, így a folyam értéke 6-nál több nem lehet.
A minimum 3, mert: Ha a gráf élein a kapacitásokat a jobb oldali ábra szerint osztjuk el, akkor a maximális folyam értéke 3 (a jelölt utakon 1-1 egységet viszünk, a többin 0-t). Ennél kevesebb a kapacitások tetszőleges elosztása esetén sem érhetünk el, hiszen a a három jelölt úton 1-1 egységet mindenképp el tudunk juttatni s-ből t-be.

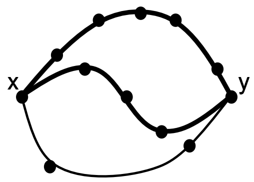




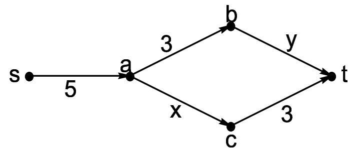
4. Definíció: Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb pozitív egész szám, melyre van a gráfnak annyi színt hsználó megengedett színezése. (megengedett színezés: minden csúcs kap egy színt, úgy, hogy bármely él két végpontja különböző színt kap) Tétel: Ha egy gráf tartalmaz páratlan hosszú kört, akkor a gráf kromatikus száma legalább 3. (hiszen egy páratlan hosszú kör nem színezhető két színnel) A Petersen gráf tartalmaz páratlan hosszúságú kört (pl a külső 5 pont egy öt hosszú kört alkot), így a gráf kiszínezéséhez legalább 3 szín kell. Ennyi viszont elég is, mert az alábbi ábrán gráf egy 3 színt használó megengedett színezése látható.



5. Menger-tétel: Ha egy gráf k-szorosan összefüggő, akkor tetszőleges két pontja között fut k db pontdiszjunkt út. (pontdiszjunkt, azaz egy csúcsot csak egy ut használhat.)
Válasszuk ki a gráf két teszőleges csúcsát (legyenek ezek x és y), a gráf háromszorosan összefüggő, így Menger tétele miatt bármely két csúcsa, így x és y között vezet is, vezet három pontdiszjunkt út. Ezen utak között vagy van kettő, melyek páros sok pontot használnak, vagy van kettő, melyek páratlan sok pontot használnak (x-en és y-on kívül). Minkét esetben igaz, hogy a két azonos paritású út x-szel és y-nal összekötve egy páros kört alkot.



6. 1. megoldás: s-ből és a-ba legfeljebb 5 egységet tudunk átjuttatni, így a maximalis folyam értéke sem lehet 5-nél több. a és t között két út is vezet, a felsőn $min\{3, y\}$ egység mehet ($\min\{a, b\}$ jelöli a és b közül a kisebbet), míg az alsón $\min\{x, 3\}$ egység mehet, így legfeljebb ezek összege mehet a és t között. Tehát a maximális folyam értéke $\min\{5, \min\{3, x\} + \min\{3, y\}$. [abra]
2. megoldás: Tétel: A maximális folyam értéke megegyezik a minimális vágás értékével.
A gráfnak 8 olyan vágása van, melynél s és t különböző részbe esik. Ezek közül a minimálisat kell kiválasztanunk, ami $\min\{5, \min\{3, x\} + \min\{3, y\}$.



7. Tétel: Ha egy gráf k-szorosan összefüggő, akkor bármely csúcsának foka legalább k. (hiszen egy legfeljebb $(k-1)$ fokú csúcs szomszédait, legfeljebb $(k-1)$ csúcsot elhagyva a gráf két részre esik)
Tétel: Ha egy gráf síkbarajzolható, akkor van legfeljebb 5 fokú csúcsa.
A gráf hatszorosan összefüggő, így bármely csúcsának foka legalább 6, tehát a gráf nem rajzolható síkba.

8. A G gráf kromatikus számát $\chi(G)$ jelöli, a függetlenségi számát pedig $\alpha(G)$. (egy gráf függetlenségi száma a gráfból kiválasztható legnagyobb olyan feszített részgráf mérete, melynek egyetlen éle sincs) Színezzük ki a gráfot $\chi(G)$ színnel, ekkor az egyes színosztályok mérete legyen $m_1, m_2, \ldots m_{\chi(G)}$. Ekkor $m_1 + m_2 + \cdots + m_{\chi(G)} = |V(G)|$. Minden színosztály független pontokból áll (azaz olyan pontokból, melyek közt nem fut él), így legfeljebb $\alpha(G)$ db csúcsot tartalmazhat. Azaz $m_i \leq \alpha(G)$. Tehát $|V(G)| = m_1 + m_2 + \cdots + m_{\chi(G)} \leq \alpha(G) * \chi(G)$