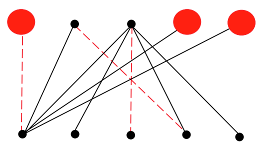
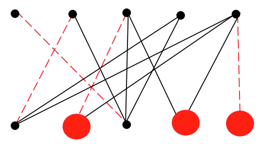
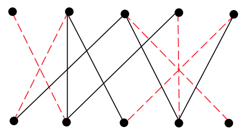
Számítástudomány elemei
6. gyakorlat megoldások

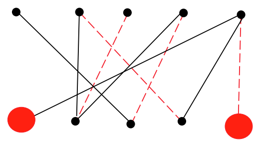
1. ***1. Tétel.*** *[Hall] $G = \{A, B, E\}$ páros gráfban pontosan akkor van A-t lefedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A$-ra teljesül: $|N(X)| \geq |X|$, ahol $N(X) = \{v | \exists u \in X, (u, v) \in E\}$.*

   Az alábbi ábrákon maximális párositás egy lehetséges éleit piros szagatott vonalak jelzik, ahol nem lehet teljes párosítás, ott nagy piros pontok jelzik, mely csúcshalmazra sérül a Hall- feltétel.



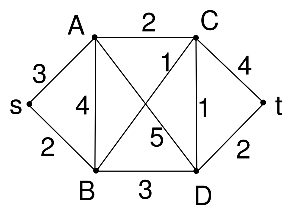






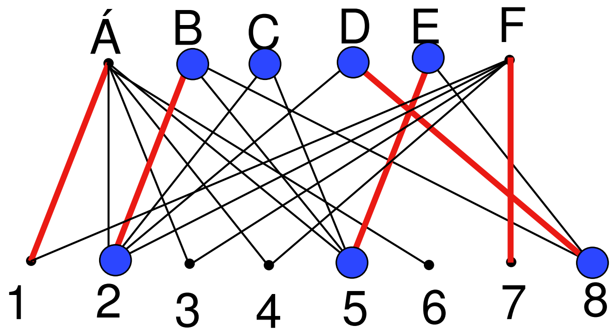
2. Dijsktra-algortimus: Veszi a gráfnak azt a pontját (s), amelyiktől szeretnénk a többi csúcs távolságát meghatározni. Ekkor a jó halmaz $\{s\}$, és táblázat első sorában s alá 0-t írunk, illetve azok alá amelyekhez megy s-ből él az él súlyát, a többi alá ∞-t. Ezentúl veszem a táblázat legalsó sorából még nem jó halmazba tartózó pontok közül azt, amelyik alatt a legkisebb érték van (v). v-t berakom a jó halmazba, és írok még egy sort a táblázatba, ahol a jó halmazba tartózó pontok értékeit nem bántom, de a többi alá beírom a kisebbet az eddigi érték ill, a v-hez tartozó érték + v-ből a csúcsba mennő él súlya, ezt addig ismétlem , még a jó halmaz le nem fedi az összes pontot.

s	A	B	C	D	t	jó halmaz
0	3	2	∞	∞	∞	$\{s\}$
0	3	2	3	5	∞	$\{s, A\}$
0	3	2	3	5	∞	$\{s, A, B\}$
0	3	2	3	4	∞	$\{s, A, B, C\}$
0	3	2	3	4	6	$\{s, A, B, C, D\}$



3. ***2. Tétel.*** *[Hall] $G = \{A, B, E\}$ páros gráfban pontosan akkor van A-t lefedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A$-ra teljesül: $|N(X)| \geq |X|$, ahol $N(X) = \{v | \exists u \in X, (u, v) \in E\}$.*

   Mivel 6 ember van, ezért legfeljebb 6 független él lehet, de a jelölt 4 embernek, csak a jelölt 3 állás felel meg, így 1 ember biztos állás nélkül marad. Tehát legfeljebb 5 független él lehet, annyit viszont mutatunk.



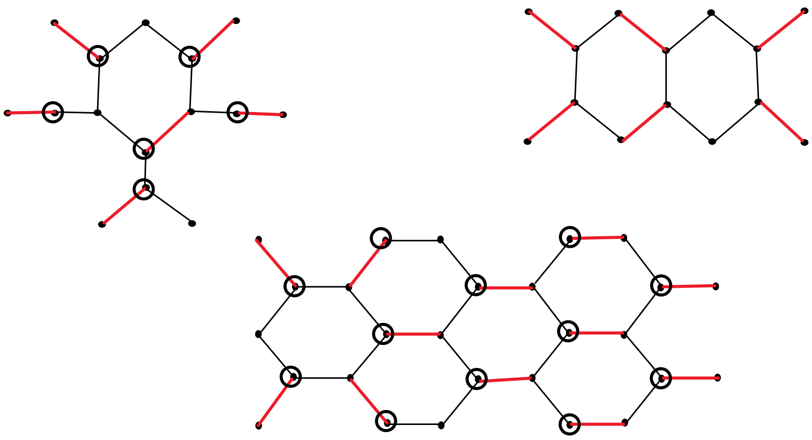
4. ***3. Tétel.*** *[König] Páros G gáfban $\tau(G) = \nu(G)$*

   Azaz páros gráfban az éleket lefogó pontok száma megegyezik a legnagyobb független élhalamz méretével. Bár nékünk most az is elég lesz , hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$.

   A jelölt élek független élrendszer, már csak be kell látni, nagyobb nem lehet. Az első gráfban a jelölt pontok egy éllefogó rendszert alkotnak, mivel mérete megegyezik a független élek számával, ezért a maximális független él rendszer

   A másodikban 14 pont van, így legfeljebb 7 független él van (teljes párosítás), ha lenne benne teljes párosítás, akkor minden csúcsot le fedne egy él. Ezért vegyük az első fokú pontokat, és jelöljük be a hozzájuk tartozó éleket. Ami így marad gráf, abban is van első fokú pont, ezért jelöljük be az ő éleiket is, de bajban leszünk, mert lesz pont melynek már nem lesz szabad szomszédja. Tehát az a feltevésünk, hogy van teljes párosítás híbás volt. Vagyis legfeljebb 6 független él lehet, de annyit mutatunk is.

   A harmadik gráf valójában páros gráf (a jelölt pontok az egyik pontosztály), melynek a pontosztályának a méerete 12 és 15 pont, ezért legfeljebb 12 független él lehet, anyit viszont mutatunk, ez nem lesz más, mint a kisebbik pontosztályt lefedő élrendszer.



5. Feltehető hogy páros csúcsa van, különben nem lehetne teljes párosítása. Teljes indukció a fa csúcsainak (n) számára:

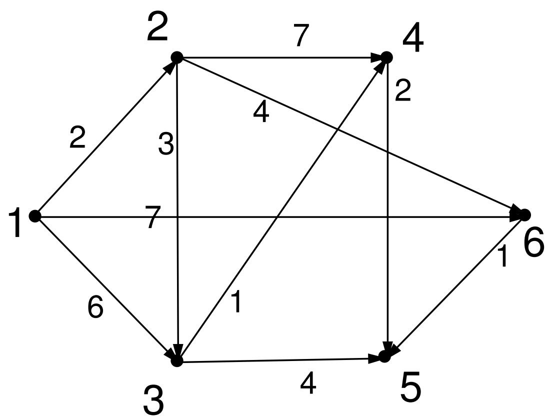
   $n = 2$ esetén az egyszem él a teljes párosítás.

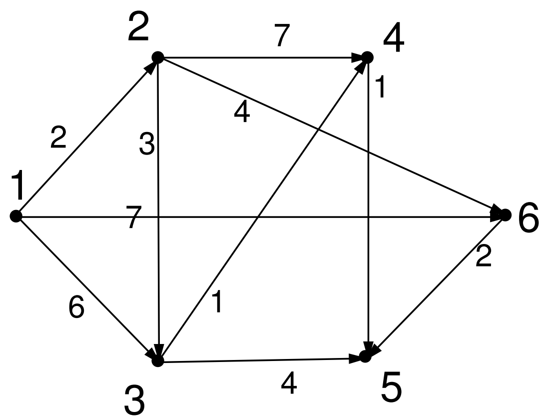
   Tf: n-ig tudjuk, ahol n páros, nézzük $n+2$-re, a fának van első fokú pontja, így annak párosításához a hozzá tartozó élt mindenképpen be kell húznunk, így marad egy n pontú fánk, amiről már tudjuk, hogy legfeljebb 1 féle teljes párosítása van.

6. Dijsktra-algortimus: Veszi a gráfnak azt a pontját (s), amelyiktől szeretnénk a többi csúcs távolságát meghatározni. Ekkor a jó halmaz $\{s\}$, és táblázat első sorában s

alá 0-t írunk, illetve azok alá amelyekhez megy s-ből él az él súlyát, a többi alá ∞-t. Ezentúl veszem a táblázat legalsó sorából még nem jó halmazba tartózó pontok közül azt, amelyik alatt a legkisebb érték van (v). v-t berakom a jó halmazba, és írok még egy sort a táblázatba, ahol a jó halmazba tartózó pontok értékeit nem bántom, de a többi alá beírom a kisebbet az eddigi érték ill, a v-hez tartozó érték $+$ v-ből a csúcsba mennő él súlya, ezt addig ismétlem , még a jó halmaz le nem fedi az összes pontot.

Az első sor alapján tudjuk, hogy v_1-ből megy v_2-be 2, v_3-ba 6 és v_6-ba 7 élsúllyal él. minimalitás miatt máshova v_1-ből nem megy. Az algoritmusról tudjuk, hogy a következő sorból v_2-ből kimennő élekről kapunk információt. Minimalitás miatt csak azt nézzük meg, ahol változott a táblázatban az érték. Ezek alapján v_2-ből megy v_3-ba 3, v_4-be 7, v_6-ba 4 súllyal él. A következő lépésben ugyanez történik v_3-mal. Utána a tábla szerint v_4, ill v_6 is következhet, ennek megfelelően két minimális gráf lett, ahol a többi csúcsból jövő éleket szintén feltüntettük, az eddigiek alapján.





1*. ***4. Tétel.*** *[]Gráf k pont elhagyása után szét esik legalább $k+2$ komponensre, akkor nem lehet benne Hamilton-út.*

X pontjai izolált pontok lesznek, tehát $|X|-2$ pont elhagyása után a gráf szét esik legalább $|X|$ komponensre, így a tétel alapján nem lehet benne Hamilton-út.

Egy páros gráf egyik pontosztályában van olyan X részhalmaz, amelyre $|N(X)| \leq |X|-2$. Bizonyítsuk be, hogy nincs a gráfban Hamilton-út!