Számítástudomány alapjai

5. gyakorlat feladatainak megoldásai

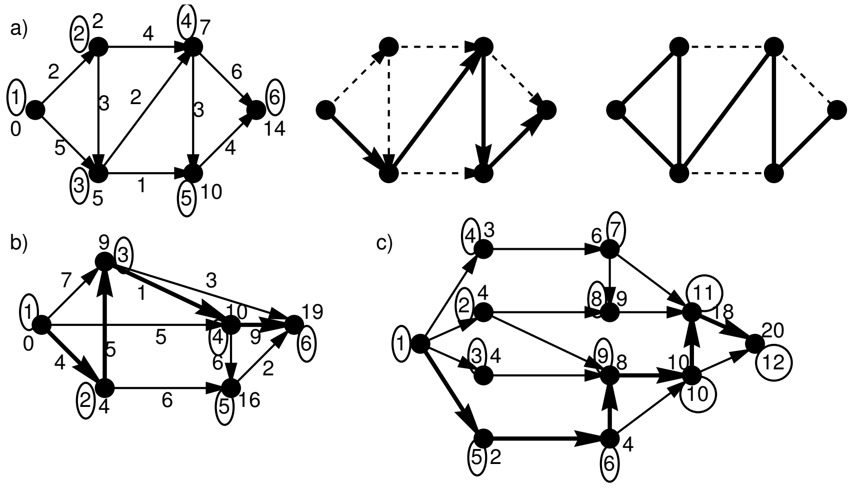
A feladatok megoldásai itt elég részletetesek, zh-ban nem kell ennyit írni.

1. Az a) rész megoldása. A PERT módszert alkalmazzuk. Először meg kell határozni, milyen sorrendben vizsgáljuk meg a csúcsokat. Az első csúcs mindig a kiindulási forrás. A másodikat úgy választjuk ki, hogy letakarjuk az első csúcsot, és a maradékból egy forrást (tehát olyan csúcsot, amibe nem fut él, csak a most letakart elsőből) választunk (ha több van, bármelyik jó). Ezután az első két kiválasztott csúcsot letakarjuk, a maradékból egy forrás lesz a harmadik csúcs, majd az eddigi három kiválasztottattakarjuk le, és így tovább. Az utolsó csúcs az eredeti nyelő lesz. Az ábrán a csúcsokhoz tartozó bekarikázott számok jelölik a sorrendet.

   Ezután ebben a sorrendben végigmegyünk a csúcsokon, és mindegyikre meghatározzuk az oda vezető maximális út hosszát. Ez az első csúcsra 0 (onnan indulunk), a második csúcsba csak az első csúcsból lehet eljutni egy 2 súlyú élen át, így az oda vezető egyetlen út hossza 2. A harmadik csúcsba már két lehetőségünk van, vagy az első, vagy a második csúcsból juthatunk oda; az elsőből vezető út hossza 5, a másodikból vezető leghosszabb úté is 5, így a maximális út hossza 5. Ezt folytatjuk. A 6. csúcshoz vezető leghosszabb út úgy adódott, hogy a 6. csúcsba vagy a 4., vagy az 5. csúcsból jöttünk; ha a 4.-ből, akkor a leghosszabb út hossza 7+6 (7 volt a 4.-be a leghosszabb út, ehhez jön egy 6 súlyú él), ha az 5. csúcsból, akkor a leghosszabb út hossza 10+4, ebből az utóbbi több, így a 6.-ba vezető leghosszabb út hossza 14.

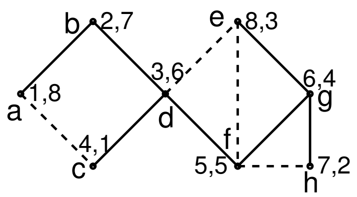
   Az utolsó csúcsba vezető leghosszabb út hossza már megvan, már csak a konkrét utat kell megadni (ezt kritikus útnak hívjuk). Ezt visszafelé csináljuk: az utolsó előtti csúcs az, amelyikből a 6.-ba írt számot kaptuk (itt az 5. csúcs, mert azon keresztül megy hosszabb út a 6.-ba), az azelőtti az, amelyikből az 5.-be írt számot kaptuk (a 4.) és így tovább. Ha egy csúcsba több helyről is jöhetünk maximális úton, akkor bármelyik jó a kritikus útba (ami esetleg többféle lehet). Egy kritikus út van a középső ábrán. A kritikus élek meghatározásánál akkor, amikor az előbbi módszernél visszafelé menet több lehetőségünk is van, akkor mindegyikhez tartozó él kritikus (tehát nem az egyiket kell venni, hanem az összeset). A kritikus élek a jobboldali ábrán vannak berajzolva.

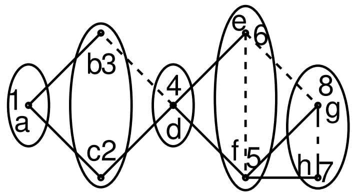
   A b) és c) rész hasonló, megadtam a sorrendet (karikázott számok), az egyes csúcsokba vezető leghosszabb út hosszát, valamint a kritikus utat (ezekben a gráfokban csak egy kritikus út van, ekkor ennek az élei a kritikus élek).



2. A feladat megoldásához az élek súlyaira nincs szükség.

   (a) Egy mélységi bejárást úgy adhatunk meg, hogy elindulunk az a csúcsból, majd sorban megyünk, az aktuális csúcsból olyan szomszédjába lépve, amelyet még nem jártunk be. Eközben sorban megkapják a csúcsok a mélységi számokat. Amikor elakadunk, azaz az aktuális csúcsnak nincs bejáratlan szomszédja, ő megkapja a soron következő befejezési számot (az első elakadásnál az 1-est), majd visszalépünk egyet azon az élen, amelyen jöttünk. Ezt a csúcsot (amit már bejártunk) is megvizsgáljuk, ha van még bejáratlan szomszédja, megyünk arrafelé, ha nem, ő is megkapja a befejezési számot és így tovább. Pl. egy lehetséges mélységi bejárás (a v azt jelenti, visszafelé léptünk): $a, b, d, c, v, f, g, h, v, e, v, v, v, v, v$. A mélységi és befejezési számok a csúcsok mellett vannak feltüntetve (első a mélységi, második a befejezési szám). A mélységi feszítőfa éleit is berajzoltam.



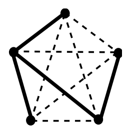


(b) A szélességi bejárásnál egy csúcsnak először az összes szomszédját bejárjuk (megkapják a bejárási számokat), majd ezeken a szomszédokon megyünk egyesével végig, és mindegyiknek megszámozzuk a szomszédait, majd ezeken a "másodszomszédok" megyünk végig stb. Így lényegében szintekre osztottuk a csúcsokat, egy szinten azok a csúcsok vannak, amelyek ugyanolyan távol vannak a kiindulási csúcstól. A szélességi bejárásnál ha ugyanabból a csúcsból indulunk, a szintek mindig ugyanazok, csak a szinteken belül a csúcsok sorrendje lehet más, illetve az is, hogy két szomszédos szint közötti élek hogyan futnak. Egy lehetséges bejárást felrajzoltam.

3. (a) Egy teljes gráfban bármelyik csúcs szomszédos az összes többivel, így a szélességi bejárásnál az összes csúcsot megkapjuk az első szinten, így egy csillagot kapunk részfaként. A mélységi bejárás pedig mindig tud továbbmenni, amíg van csúcs, így ekkor egy utat kapunk.

   (b) Azt kell megmutatni, hogy K_4 minden feszítőfája csillag vagy út (éppen ezek állnak elő szélességi vagy mélységi bejárás feszítőfájaként). Ezt lehet pl. úgy, hogy egy 4 csúcsú (3 élű) fában van legalább egy legalább 2 fokú csúcs, amiből tehát már ki is indul két él. Még egy élet kell ehhez csatlakoztatni, ha ez a két él alkotta V alak egyik végéhez csatlakozik, akkor egy utat kapunk, ha a közepéhez, akkor csillagot.

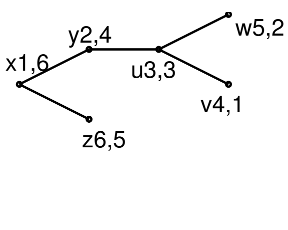
   Ugyanez nem igaz K_5-re, az ábrán egy olyan fája van, ami se nem csillag, se nem út.



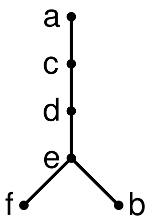
4. Tegyük fel, hogy a ötszöget és b hatszöget használtunk fel, ekkor a konvex test lapjainak száma $a+b$. Az éleket megszámolhatjuk úgy, hogy összeadjuk az összes lap összes éleinek számát, ez $5a+6b$, és ekkor minden élet kétszer számoltunk, annál a két lapnál, amiknek a határán van, így az élek száma $\frac{5a+6b}{2}$. Az élek száma a csúcsok számának $\frac{3}{2}$-szerese, mert minden csúcs 3-adfokú, így ha összeadjuk a fokszámokat, a csúcsok számának háromszorosát kapjuk, ez viszont éppen az élek számának kétszerese. Így a csúcsok száma végül $\frac{5a+6b}{3}$. Beírva az Euler-formulába: $c-e+l=2$, $\frac{5a+6b}{3}-\frac{5a+6b}{2}+(a+b)=2$, az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $a=12$ (b kiesik, így a hatszögek számát így nem tudjuk meghatározni).

5. Három úton juthatunk el A-ból D-be: $A\to B\to D$, $A\to C\to D$, $A\to B\to C\to D$. Az utak hossza rendre $a+1$, $2+b$, $a+1+b$, ezeknek kell a maximumát meghatározni. A harmadik biztosan legalább annyi, mint az első, így az elsővel nem kell tovább foglalkozni. A második és a harmadik közül a harmadik a nagyobb, ha $a+1+b>2+b$, azaz $a>1$, míg a második a nagyobb, ha $a<1$ (ha $a=1$, a két út hossza egyenlő). Így tehát a maximum $2+b$, ha $a<1$ és $a+1+b$, ha $a\geq 1$.

6. A feszítőfát rekonstruáljuk. A csúcsok sorban a mélységi szám szerint x,y,u,v. Eddig mehetünk, itt azonban elakadunk, mert v befejezési száma 1, úgyhogy visszalépünk 1-et. u befejezési száma nem 2, tehát u-ból még tudunk másmerre továbbmenni, a soron következő csúcs az 5-ös mélységi számú, tehát w. Ennek befejezési száma 2, tehát innen vissza, majd u-ból is, majd y-ból is, x-ből azonban még van egy csúcs, ez z. z-ből is vissza, majd x-et is befejeztük, ezzel a feszítőfa készen van. A gráf ebből nem egyértelmű, lehet, hogy pl. éle (y,w) vagy (x,w) is, ezt a bejárásból nem tudjuk eldönteni.



7. A szélességi feszítőfából leolvasható, hogy a-nak csak egy szomszédja van, hiszen a szélességi bejárás először mindenképpen a szomszédait járja be. Hasonlóan c-nek sincs több szomszédja, majd sorban d-nek és e-nek sincs. Tehát csak egy él jön szóba, b és f között. Ez lehet éle a gráfnak, ettől még kaphatjuk ugyanazt a bejárást.



Ha b-ből indul a bejárás, akkor b-nek és e-nek ugyancsak nincsen más szomszédja. A szintek is megállapíthatóak: d és f van egy szinten, ők ilyenkor lehetnek szomszédosak, míg a következő szintbeli egyetlen csúcs (c) lehet szomszédos f-fel, csak éppen a fába a d-be menő éle került be (és ekkor f szomszédjai között már nem vizsgáljuk, mert már bejártuk). Végül a-nak nincs korábbi szomszédja, mert különben korábbi szintre került volna. Így tehát itt két él lehetséges még: (c, f) és (c, d).

8. Az egyik csúcshalmaz az emberek, a másik az állások, egy ember és egy állás között él fut, ha az illető jelentkezik az adott állásra. A feladat egy maximális párosítás találása az így kapott páros gráfban.

   Mind a 6 állás nem tölthető be, mert van 4 olyan állás (2, 3, 4, 5), amelyekre csak 3 ember jelentkezett (C, D, E), így ezek közül az állások közül egy biztosan üres marad (ez egy ún. Königakadály, lásd az első ábrán). Egy híján az összes állás viszont már betölthető, pl. 1: A, 2: C, 3: E, 4: betöltetlen, 5: D, 6: F (második ábra).

   Ha most F megpályázza a 2-es állást is, akkor betölthető mind, csak kicsit át kell alakítani az előző megoldást: a 2-es állást kapja F, a 3-ast C, a 4-est E és a 6-ost G (1: A és 5: D nem változik). Ekkor mind a 6 állás be van töltve. Lényegében a $G-6-F-2-C-3-E-4$ út mentén mindenki a „másik" állást kapta, mint eddig, és ezzel eggyel több él került a párosításba. Ezt az utat javító útnak hívjuk (harmadik ábra).