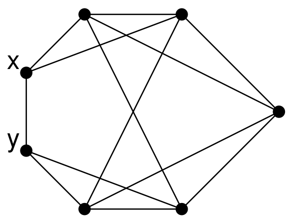
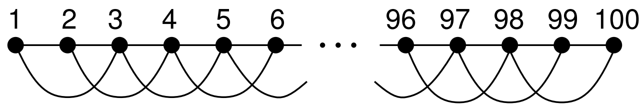
Számítástudomány alapjai
4. gyakorlat megoldások

1. A Dirac-tétel feltétele az, hogy bármely két csúcs fokszámának összege legalább annyi, mint a csúcsszám. Ez itt nem teljesül, hiszen a csúcsszám 7, de van két harmadfokú csúcs (x és y), ezek fokszám-összege csak 6. Tehát Dirac-tételéből nem következik, hogy a gráfban van Hamilton-kör.
Az Ore-tétel feltétele az, hogy bármely két *nem összekötött* csúcs fokszámának összege legalább annyi, mint a csúcsszám. Ez itt teljesül, hiszen a csúcsszám 7 és bármely két nem összekötött csúcs fokszám-összege legalább 7. (Mert csak a két harmadfokú csúcs fokszám-összege lenne 7-nél kevesebb, de ezek össze vannak kötve.) Tehát Ore-tételéből következik, hogy a gráfban van Hamilton-kör.



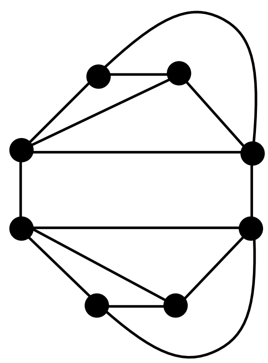
2. A gráf:



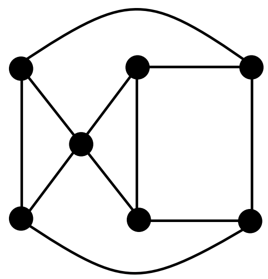
csúcs	1	2	3	4	5	6	...	96	97	98	99	100
fokszám	2	3	4	4	4	4	...	4	4	4	3	2

A gráfban nem minden fokszám páros, így a gráf Euler-kört nem tartalmaz.
A gráfban 2 csúcs kivételével minden fokszám páros és a gráf összefüggő, így a gráf Euler-utat tartalmaz.

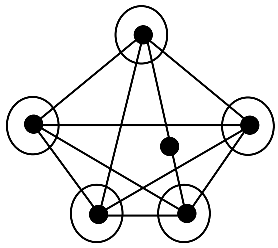
3. (a) A gráf síkbarajzolható:



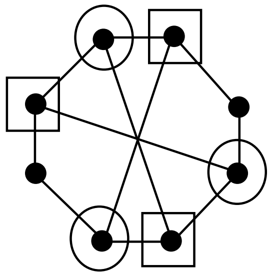
(b) A gráf síkbarajzolható: (a két jobb oldali csúcs felcserélésével)



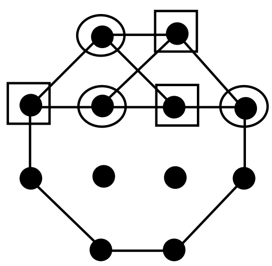
(c) A gráf nem rajzolható síkba, hiszen tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot: (a jelölt csúcsok egy topologikus K_5 csúcsai)



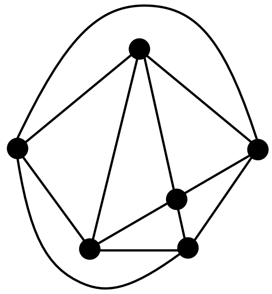
(d) A gráf nem rajzolható síkba, hiszen tartalmaz $K_{3,3}$-tel topologikusan izomorf részgráfot: (a jelölt csúcsok egy topologikus $K_{3,3}$ csúcsai, egy élet el is hagytunk)



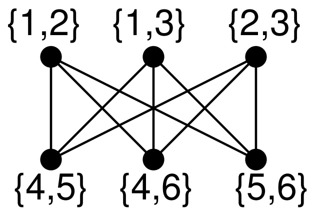
(e) A gráf nem rajzolható síkba, hiszen tartalmaz $K_{3,3}$-tel topologikusan izomorf részgráfot: (a jelölt csúcsok egy topologikus $K_{3,3}$ csúcsai)



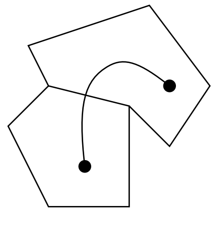
(f) A gráf síkbarajzolható:



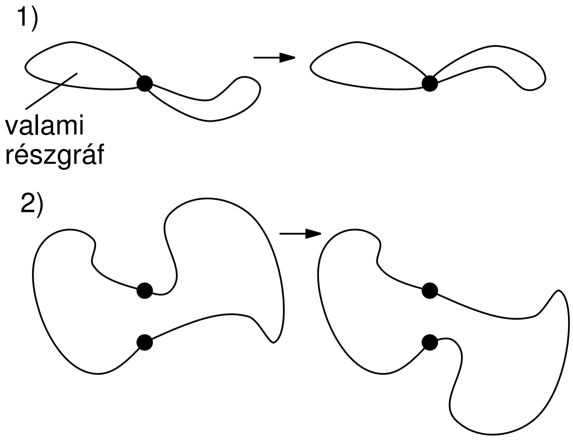
4. Egy kis magyarázat a feladathoz: A hatelemű halmaz legyen a következő: $\{1,2,3,4,5,6\}$. Ekkor a gráfnak csúcsa pl az $\{3,5\}$ halmaz, mely össze van kötve az $\{1,4\}$ csúccsal (mert a $\{3,5\}$ és az $\{1,4\}$ halmaznak nincs közös eleme), de nincs összekötve a $\{2,3\}$ csúccsal (mert a $\{3,5\}$ és az $\{2,3\}$ halmaznak van közös eleme).
   1. megoldás: A gráfnak $\binom{6}{2} = 15$ csúcsa van, mert hat elemből ennyiféleképpen lehet kiválasztani kettőt. Minden csúcs $\binom{4}{2} = 6$ fokú, hiszen egy adott kételemű halmaz esetén ennyiféleképpen választhatunk ki a maradék 4 elemből 2-őt. Ezek alapján az élek száma $\frac{15*6}{2} = 45$. Tétel: Ha G síkbarajzolható, akkor $e \leq 3n - 6$, ahol n G csúcsszáma, e az élszáma. Mivel ebben ez esetben ez az egyenlőtlenség nem teljesül ($45 \not\leq 3 * 15 - 6 = 39$), így a gráf nem rajzolható síkba.
   2. megoldás: A gráf tartalmaz $K_{3,3}$-at, így nem rajzolható síkba.



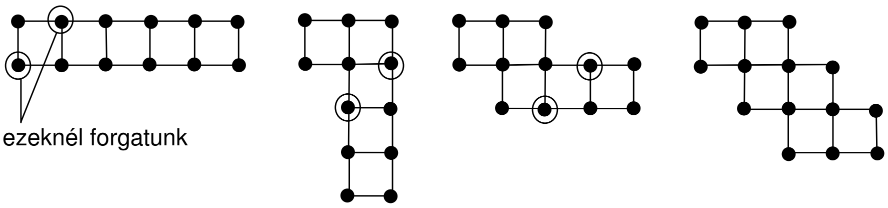
5. Tegyük fel (indirekten), hogy az 5 olyan ország közül bármely kettő szomszédos. Ekkor az országok fővárosai a közös határukat keresztezve összeköthetők lennének. (Az ábra szerint.) Ekkor az 5 főváros közül bármely kettő össze lenne kötve, ami azt jelentené, hogy egy K_5-öt rárajzolnánk a gömbre. Mivel a gömbre rajzolhatóság ekvivalens a síkba rajzolhatósággal, így ez azt is eredményezné, hogy a K_5-öt síkbarajzolható lenne. De ez lehetetlen, ezért hamis volt a kezdeti feltevés, tehát igaz, hogy van két ország, melyek nem szomszédosak.



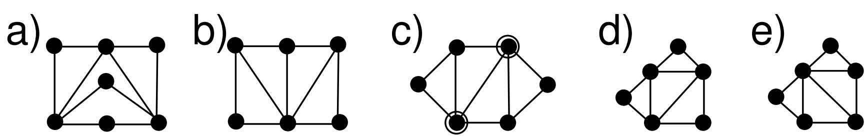
6. Két gráf pontosan akkor gyengén izomorf, ha megkaphatók egymásból "forgatások" segítségével. (Forgatás: 1) egy elvágó pontnál (olyan pont, melyet elhagyva a gráf két részre esik) kettészedjük a gráfot, majd az egyik rész megfordítása után újra összeragaszjuk azt, 2) két olyan pontnál, melyeket egyenként elhagyva a gráf még nem esik két részre, de melyeket együttesen elhagyva a gráf már két részre esik, szétszedjük a gráfot, majd az egyik rész megfordítása után újra összeragasztjuk)



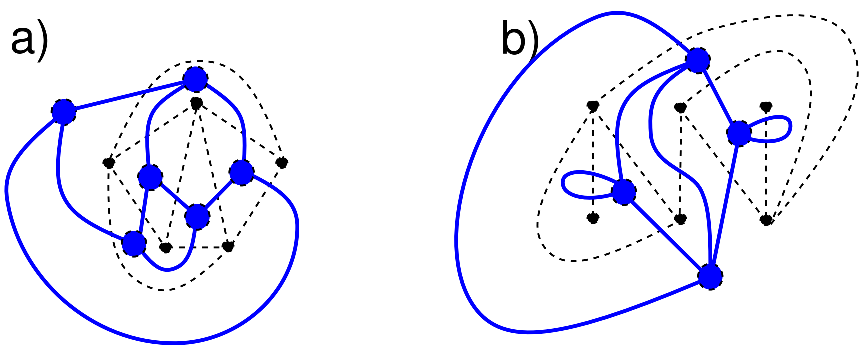
A két gráf gyengén izomorf, hiszen megkaphatók egymásból ilyen forgatásokkal:



7. Az a) gráfnak 10 éle van míg a többinek 9, így az nem lehet gyengén izomorf egyetlen másik gráffal sem. A c) és d) gyengén izomorf, hiszen ha c)-ből elhagyjuk a két jelölt pont, akkor a gráf két részre esik és ha az ezen csúcsoknál szétválasztjuk a gráfot, majd az egyik rész megfordítása után újra összeragasztuk, akkor a d) gráfot kapjuk. A b) és e) gráfok izomorfak, így gyengén izomorfak is.

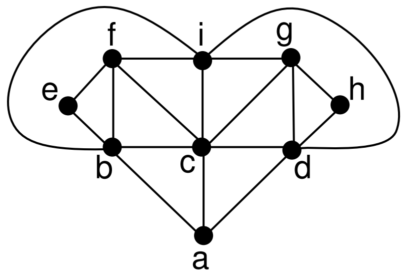


8. A gráfok duálisa:



9. A G gráf 3-reguláris, ha bármely csúcsának a foka 3.
G 20 pontú és minden csúcsának foka 3, ekkor G-nek $\frac{20*3}{2} = 30$ éle van. Így G teszőleges síkrajza esetén igaz az Euler-formula, azaz $c+t = e-2$, ahol c a csúcsok, t a tartományok, e pedig az élek száma. Ezt felhasználva G tartományainak száma $t = e-2-c = 30-2-20 = 8$. És mivel G duálisának, G^*-nak a csúcsszáma éppen G tartományainak száma, így a megoldás is 8.

10. Egy síkrajz:



Egy síkrajz egyenes élekkel: