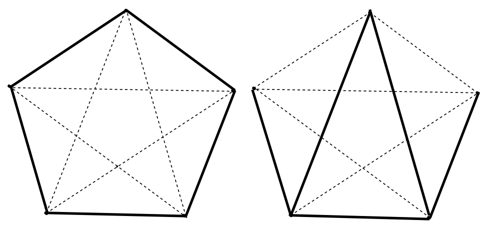
Számítástudomány alapjai
3. gyakorlat megoldások

1. (a) A vastagított élek a gráf, a szagatott a komplementer. Az első ábrán a gráf is, komplementere is C_5 (5 hosszú kör). A másodikon egy-egy háromszög két farokkal.



   (b) Ha a gráf és komplementere izomorf, akkor mindkettőben ugyanannyi él van. Viszont a gráf és komplementere együttesen kiadják a teljes gráfot, így élszámaiknak összege $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, ami 6 csúcsnál 21, ami páratlan, így nem lehet ugyanannyi éle a gráfnak és komplementerének, így nem lehetnek izomorfak.

2. **1.megoldás** Bizonyítás módja indirekt. Tegyük fel, hogy legfeljebb $\Delta - 1$ elsőfokú pont van, ekkor becsüljük meg alulról a fokszámok összegét, legyen a csúcsok száma n:

$$\sum_{v\in G} d(v) \geq (\Delta-1)\cdot 1 + (n-\Delta)\cdot 2 + 1\cdot\Delta = \Delta - 1 + 2n - 2\Delta + \Delta = 2n-1$$

De tudjuk, hogy a fokszámok összege az élek számának kétszerese, ami egy fa esetében $2(n-1) = 2n-2$, ami ellentmondás.

2.megoldás Vegyünk egy Δ fokszámú csúcsot, és hagyjuk el a gráfból. Ekkor a fa szétesik Δ fára, hisz a fában nincs kör, ezért egy csúcsból kiinduló utak, nem találkozhatnak újra. A Δ kissebb fa külön-külön tartalmaz legalább 2 első fokú pontot. Így ha ezeket újra összerakom a Δ fokszámú csúcsnál, a fában kell, hogy maradjon még Δ elsőfokú pont.

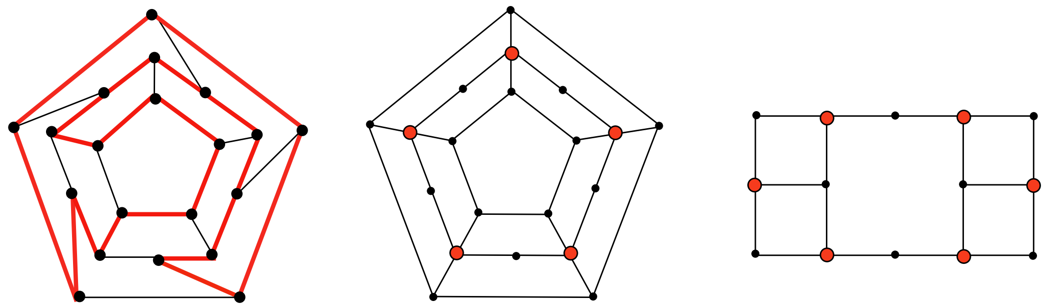
3. Számoljuk össze hány fa adható meg az 1,2,...,50, illetve az 51,52,...,100 pontokon. Cayley-tétel miatt 50 számozott csúcson 50^{48} fa van. A két fát $50\cdot 50$ féleképköthetem össze, 50 féle lehet az él mindkét végpontja. Ez összesen $(50^{48})^2\cdot 50^2 = 50^{98}$ fa.

4. a fa és Prüfer-kódja egy-egyértelműen megfelelnek egymásnak. Így elég, ha az ilyen tipusú fákhoz tartozó Prüfer kódokat megszámoljuk. A Prüfer-kódok nyelvén a feltétel azt jelenti, hogy a kódban nem szerepel 3 csúcs, egy viszont kétszer, többi egyszer. Hisz a Prüfer-kódban egy csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma.A leszámlálás:

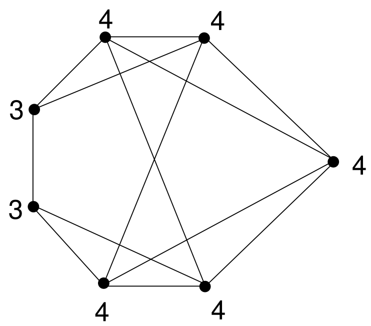
$$\left[\binom{n}{3}\cdot(n-3)\right]\cdot\left[\binom{n-2}{2}\cdot(n-4)!\right]$$

A szorzat első fele a csúcsokat választja ki, a szorzat második fele pedig elhelyezi őket a Prüffer-kódban.

5. Az első ábrán látható gráfban van Hamilton-kör (vastagított élek), így Hamilton-út is van. A többiben nincs se út, se kör, a jelölt csúcsokat elhagyva túl sok részre esik a gráf.

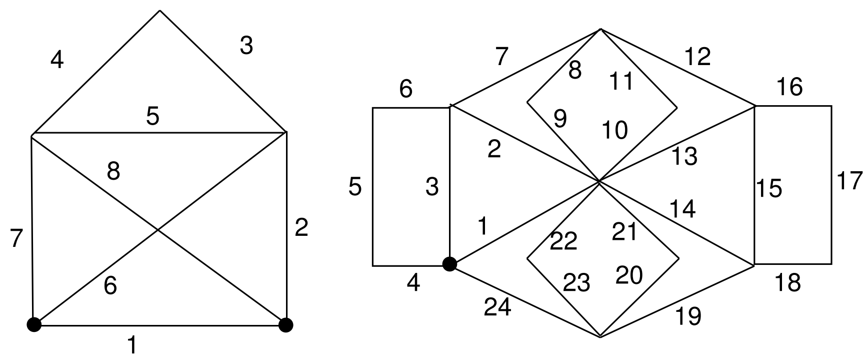


6. Dirac tételéből nem következik, hisz a gráf 7 csúcsú, és van 3-as fokszámú pontja ($3 < \frac{7}{2}$). Ore tételéből viszont következik, hisz bármely két nem összekötött csúcs fokszámainak összege legalább 7.



7. Tartalmaz Hamilton-kört, ezért utat is. Pl: 1,3,5,...,2005,2,4,...,2004,1.

8. Íme a rajzolás egy esetleges sorrendje.



9. Vizsgájuk meg a csúcsok fokszámait! 1-es fokszáma 2, hisz a szomszédai 2 és 3, 2-es fokszáma 3, hisz az szomszédai 1,3,4, hasonlóan 100-as fokszáma 2, 99-es fokszáma 3, a többi csúcsnak 4 szomszédja van: a 2-vel és az 1-gyel kisebb, illetve nagyobb számú csúcs. A gráf összefüggő, pontosan két páratlan fokszámú csúcs van, ebből következik nincs benne Euler-kör, de Euler-út már van.

10. Ahhoz, hogy egy gráfban legyen Euler-kör szügséges, hogy minden csúcsának foka páros legyen. Ha egy csúcs foka d, a komplementerben a foka $100 - d$. Így ha minden csúcs foka páros a gráfban, a komplementerben is párosak a fokszámok. Igen ám de a Euler-körhöz szükség van az összefüggőségre is. Tehát akkor van a gráfban és a komplemeterben is Euler-kör, ha minden csúcs foka páros, és gráf is és a komplementere is összefüggő

*1. A két gráf nem izomorf, mert az elsőben egy csúcson három darab háromszög megy át, míg a másodikban csak egy.