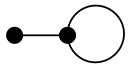
Számítástudomány alapjai
2. gyakorlat megoldások

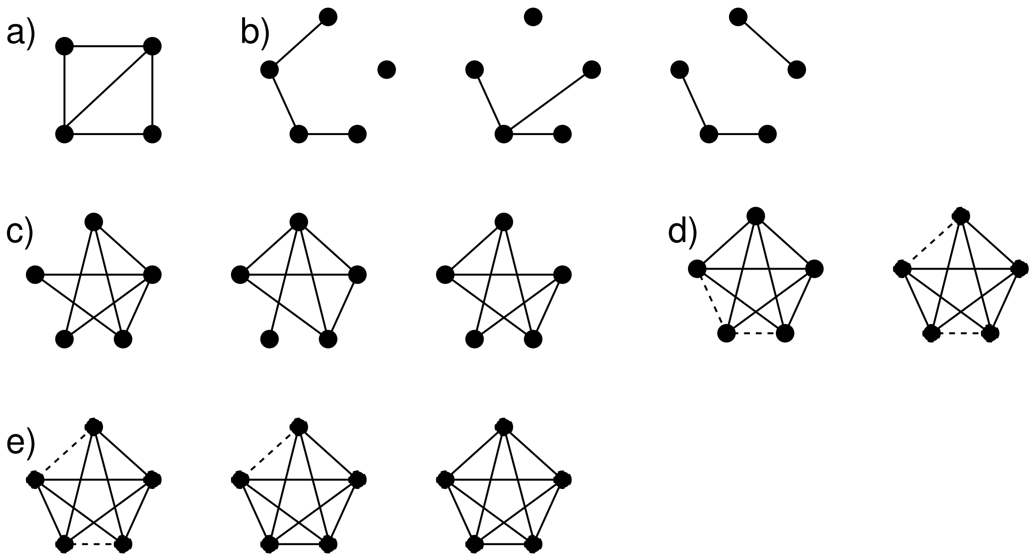
1. Az $1, 2, 3, \ldots 2004$ számokat a következő 1002 db párba oszthatjuk: $\{1, 2004\}$, $\{2, 2003\}$, $\{3, 2002\}$, $\ldots$ $\{1002, 1003\}$. Így ha az $1, 2, 3, \ldots 2004$ számok közül 1003-at kiválasztunk, akkor lesz legalább egy pár, melynek mind a két tagját kiválasztjuk, ezek összege pedig 2005 lesz.

2. A következő gráfnak minden fokszáma különböző:



De egyszerű gráfok között nincs olyan, aminek minden foka különböző lenne, mert: Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf. Ekkor G egy csúcsának a foka $0, 1, 2, \ldots$ vagy$n-1$ lehet, de G-ben nem lehet egyszerre 0 és $n-1$ fokú is, mert ha G-ben van 0 fokú (azaz izolált) pont, akkor nem lehet benne $n-1$ fokú, mert annak össze kellene kötve lenni az összes csúccsal, így a 0 fokúval is. Így G fokszámai között legfelejebb $n-1$ különböző lehet, tehát lesz G-nek két csúcsa, melynek azonos a fokszáma.

3. .



(a) Egy 4 pontú, 5 élű gráfnak egy éle hiányzik, ahhoz hogy teljes gráf legyen. (Egy teljes 4 pontú gráfnak $\binom{4}{2} = 6$ éle van.) Ezt az egy élet tetszőlegesen kiválasztva mindenképp az ábrán látható gráffal izomorf gráfot kapunk, így az ábrán látható egyetlen megfelelő gráf.

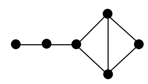
(b) Egy 5 pontú, 3 élű gráfnak mindig van két olyan éle melyeknek van közös cégpontja, mert 3 olyan élnek, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa, 6 különböző végpontja lenne. Ehhez a két élhez a harmadikat többféleképpen is megválaszthatjuk. Lehet, hogy a három él egy utat alkot, lehet, hogy egy csillagot, de az is lehet, hogy a hramadik élnek nincs közös csúcsa az első kettővel. Tehát 3 páronként nem izomorf gráf van.

(c) Egy 5 pontú 7 élű gráfnak a komplementere egy 5 pontú 3 élű gráf, amilyeneket épp az előző esetben vizsgáltunk. Továbbá két gráf pontosan akkor izomorf, ha a komplementerük izomorf. Így elég csak vennünk az előző gráfok komplementereit, ezek páronként nem izomorfak leszek, és nem lesz további gráf, mely ezek egyikével ne lenne izomorf.

(d) Egy 5 pontú 8 élű gráfnak csak két éle hiányzik, hogy teljes gráf legyen. (Egy teljes 5 pontú gráfnak $\binom{5}{2} = 10$ éle van.) Így egyszerűbb azt megvizsgálni, hogy hányféleképpen hagyhatunk egy teljes gráfból két élet, hogy nem izomrf gráfokat kapjunk. Erre két lehetőségünk van: a két elhagyott élnek vagy van kzös végpontja vagy nincs.

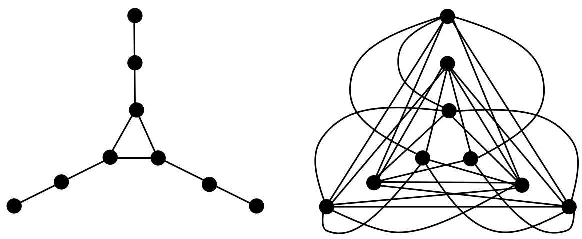
(e) Egy 5 pontú gráfnak, melynek minden foka legalább 3, a komplementre bármely csúcsának foka legfeljebb 1. Így a keresett gráfok komplementere háromféle lehet: üres gráf (nics éle), lehet egy éle vagy lehet két éle, de ezen két élnek nem lehet közös végpontja; ha a gráfnak legalább 3 éle lenne, akkor lenne két él, melyek lenne közös végpontja, így lenne a gráfnak legalább 2 fokú csúcsa. Tehát 3 páronként nem izomorf gráf van.

4. (a) A következő gráf megfelelő:



(b) Nincs, mert a fokszámösszeg páratlan.

(c) A gráf komplementerének a fokszámai a következő: 3,3,3,2,2,2,1,1,1 (a gráf 9 csúcsú, igy a gráf komplementerének fokszámai megkaphatók, ha az eredeti gráf fokszámait kivonjuk 8-ból). Ilyen gráfok könnyen rajzolhatunk, ennek komplementere pedig a feledatnak megfelelo lesz.



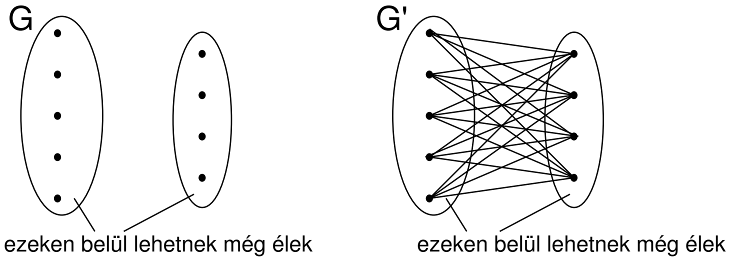
(d) Nincs, mert a fokszámösszeg páratlan.

(e) Nincs ilyen gráf, mert ha lenne, akkor a 9 fokú minden csúccsal, a 8 fokúnak 1 kivételével minden csúcsal szomszédosnak kellene lennie, de ekkor legfeljebb csak 1 elsőfokú csúcsa lehetne a gráfnak, pedig nekünk 2 kellene.

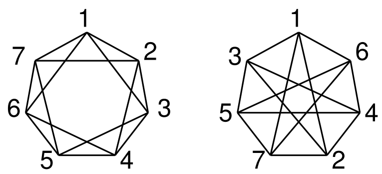
(f) Nincs ilyen gráf, mert egy 7 csúcsú gráfnak nem lehet 6-nál nagyobb fokszáma.

(g) Nincs ilyen gráf, mert ha lenne, akkor a két 6 fokú csúcsnak minden másik csúccsal szomszédosnak kellene lennie, de ekkor nem lehet a gráfban 1 fokú csúcs.

5. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő, be fogjuk látni, hogy ekkor G komplementere, G' biztosan összefüggő. Ugyanis ha G nem összefüggő, akkor létezik G csúcsainak egy olyan két részre osztása, hogy G-nek egyetlen éle sem megy a két rész között. Ekkor viszont a két rész közötti összes él éle lesz G'-nek, aminek így bármely két csúcsa között vezet út (a különbözö részbeli csúcsok között fut él, az azonos részbeliek pedig elérhetők egy tetszőleges ellentkező részbeli csúcson keresztül), tehát G' összefüggő. Tehát igaz, hogy a G gráf vagy a komplementere összefüggő.

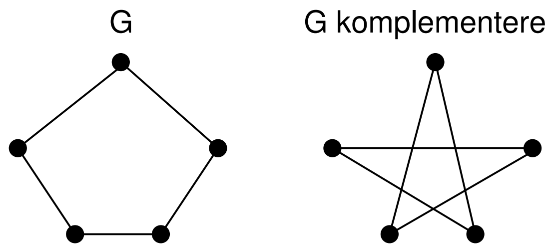


6. A két gráf izomorf, hiszen ha a két ábrán azonos sorszámmal jelölt csúcsokat megfeleltetjük egymásnak, akkor két csúcs között pontosan akkor megy él az egyik gráfban, ha a másikban is.



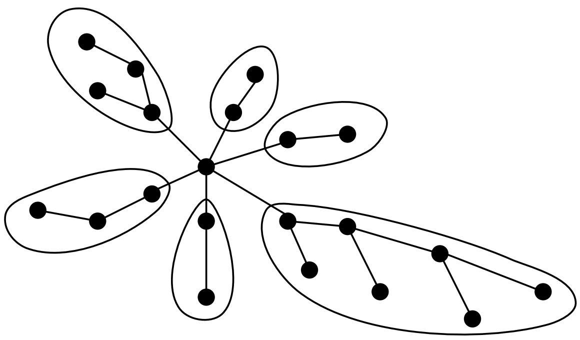
7. Megfelelő gráf egy csillag (olyan gráf, melynek van egy központi csúcsa, melyből minden másik csúcsba megy él, és más éle nincs a gráfnak) vagy egy háromszög. Más gráf nem lehet jó, mert ha veszünk két élet, melynek van közös csúcsa, akkor a harmadik él
- vagy a közös csúcsból indul, és ekkor az összes többi élnek is innen kell indulni, különben nem lesz bármely két élnek közös csúcsa
- vagy pedig a két él másik két végét kötjük össze, ekkor viszont nem lehet további élet úgy választani, hogy bármely kettőnek legyen közös csúcsa.

8. (a) A következő gráf megfelelő:



(b) Egy 6 pontú teljes gráfnak $\binom{6}{2} = 15$ éle van. Így egy 6 pontú gráfnak és a komplementerének összesen 15 éle van, de ha a kettő izomorf, akkor azonos élszámúaknak kell lenniük, ez viszont nem lehet, hiszen a 15 páratlan szám.

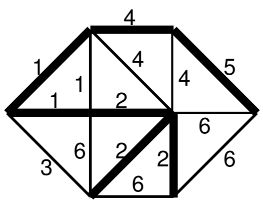
9. Legyen v egy Δ fokú csúcs! Mivel a gráf fa, így a v-ből kiinduló Δ darab "nyúlvány" nem érhet össze egymással, tehát ha bármelyiken elindulunk, akkor egyszer el kell jutnunk egy olyan pontban, melyből már nem tudunk tovább lépni, ez csak elsőfokú csúcs lehet. Mivel minden "nyúlvány" végén kell lenni egy ilyen csúcsnak, így a gráfban lesz legalább Δ darab elsőfokú csúcs.



10. (a) Algoritmus: vesszük a gráf legkisebb sorszámú elsőfokú csúcsát, azt letöröljük, és felírjuk az egyetlen szomszédja sorszámát; majd ezt ismételjük a maradék gráfra, addig, míg a gráf már csak 2 csúcsból áll, erre a gráfra már nem ismételjük az eljárást. (így egy n hosszú gráf Prüfer kódja n-2 hosszú lesz) Ez alapján a fa Prüfer kódja: 9166933

    (b) ...

11. Algoritmus: vesszük sorra a gráf éleit nem csökkenő sorrendben, és az épp sorra kerülő élet pontosan akkor vesszük be a feszítőfa élei közé, ha a már bevett élekkel nem alkot kört. Ez alapján a gráf egy feszítőfája: Különbözö feszítőfát kaphatunk, ha a gráf azonos



súlyú éleit más sorrendben vizsgáljuk. Így a feszítőfák számának meghatározásához meg kell nézni, hogy hol lehetett volna más élet bevenni. Az elején a 3 db 1 súlyú él közül bármelyik kettőt bevehetjük, de a harmadikat semmiképp sem, ez 3 válsztási lehetőség. A 3 darab 2 súlyú él mindegyikét be kell vennünk, az 1 súlyúak tetszőleges választása esetén. Ezek után a 3 súlyút semmiképp sem vehetjük be, sőt az átlós 4 súlyút sem, mert bárhogy is válsztottunk eddig, ezek bevételével már kört kapnánk. A másik két 4 súlyú él közül bármelyiket bevehetjük, de csak az egyiket, ez 2 választási lehetőség. Majd végül az 5 súlyút kell bevennünk a gráfba. Tehát összesen $2 * 3 = 6$ minimális súlyú feszítőfája van a gráfnak.