Számítástudomány alapjai
1. gyakorlat megoldások

1. Két eset van: Kérünk egy gombóc csokit, vagy nem kérünk egyet sem. Ha kérünk egy csokit, akkor a többi négy gombócot kell kiválasztanunk kilenc féléből, ismételni lehet, sorrend nem számít, ezért ezt $\binom{9+4-1}{4}$ féleképpen tehetjük meg. Ha nem kérünk csokit, akkor ugyanezt kell tennünk, de most ötöt választunk kilenc féléből: $\binom{9+5-1}{5}$. Tehát összesen $\binom{12}{4} + \binom{13}{5}$ féleképp választhatunk magunknak kelyhet.

2. Kruskal-algoritmus szerint járunk el. Melynek menete: mindig kiválasztjuk a még be nem választott élek közül a legkönnyebbet, mellyel az eddigiek még nem alkotnak fát. Ez esetben az 1 súlyú EH. ill a 2 súlyú AB, BC, DE, EF élek biztos benne lesznek, hissz az öt legkönnyebb él, és nem alkot kört. A köveztkező 3 súlyú, de most többfélét is választhatunk. Most a gráfnak négy komponense van, ezt három éllel köthetjük össze, mind három 3 súlyú. Az egyik AD, AE, BF, CF egyik, ez 4 féle lehet. A másik DG, GH közül kerül ki, ez két féle lehet, végül a harmadik FI vagy HI, szintén két féle lehet. Ez összesen $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ fa.

3. Ha egy 5-reguláris grág izomorf a komlementerével, akkor a gráf 11 csúcs kell hogy legyen, hisz egy csúcsból összesen 5+5=10 él indulhat. 11 csúcsú 5-reguláris gráf éleinek a száma: $\frac{11 \cdot 5}{2} = 27,5$, ami nem egész, tehát ilyen nincs.

4. (a) Kilenc különböző kártyánk van, melyeket nem ismételhetünk, tehát 9! féleképpen tehetjük ezt meg.

   (b) Szilárd tehát csak azt látja, hogy van 4 **A** és egy-egy **B**, **C**, **D**, **E**, **F** betű. Akkor vannak ABC szerint sorban a kártyák, ha elől van a 4 **A** és után a többi, ilyen 4! féle van, hisz csak az **A** betűket cserélgethetem. Ugyan így a **BACADAEAF** sorrendből is 4! féle van.

   (c) Összesen van 9! kártya sorrend, de minden betű sorrendből 4! van. Amiket Szilárd azonosnak lát, így szegény csak $\frac{9!}{4!}$ sorrendet tud megkülöbözetni.

5. Hét ember sorrendje 7! féle lehet, de itt két ülés mód azonos, ha azonosak a szomszédok. Vagyis se az elforgatások, se a tükrözések nem számítanak. Így a forgatások miatt 7-tel, tükrözés miatt 2-vel kell osztani. Összesen $\frac{7!}{7 \cdot 2} = 240$ féle ülésmód van.

6. (a) Ez azt jelenti, hogy meg kell nézni a 4 kettest, a 4 hármast, ... a 4 királyt és a 4 ászt hányféleképpen oszthatjuk szét a 4 ember között, hogy mind mindegyikből pontosan egyet kap. A 4 kettest 4! féleképpen oszthatjuk szét, ugyanígy a 4 hármast és a toöbbit. Tehát a paklit $4!^{13}$ féleképp oszthatjuk szét.

   (b) 4 félekép válaszhatjuk ki, ki a legyen aki az ászokat kapja, ekkor az ő többi 9 lapja $\binom{48}{9}$ féle lehet, a következő $\binom{39}{13}$ félekép kaphat lapot, a harmadik $\binom{26}{13}$ módon kaphat, míg a negyediké a maradék. Ez összesen $4 \cdot \binom{48}{9} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1$ féle leosztás.

7. 24 diák jár legalább egy szakkörre. Kérdés: hányan járnak legalább kettőre. 3 diák jár mindháromra. Tehát csak matekra és biológiára ketten, csak matekra és kémiára négyen, és csak biológiára és kémiára szintén ketten járnak, ez összesen $3 + 2 + 2 + 4 = 11$ diák. Tehát pontosan egy szakkörre $24 - 11 = 13$ diák jár.

8. Egy kiolvasás jobbra és lefele fordulások egy sorrendje. A tábla 5×6-os, ezért összesen 4 lefele és 5 jobbra mozgás van. Ezek bármilyen sorrendjéhez egy-egyértelműen megfeleltethetünk egy kiolvasást, viszont ilyen sorrendekből összesen $\binom{4+5}{4} = \binom{9}{4} =$ 126 féle van.

9. Binomiális tételből tudjuk $0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^i \cdot \binom{n}{i} + \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$ amit átrendezve azt kapom, hogy:

$$\sum_{i \text{ ps}} \binom{n}{i} = \sum_{i \text{ ptl}} \binom{n}{i}$$

ami pontosan azt jelenti, hogy a páros elemszámú részhalmazok száma megegyezik a páratlan elemszámúakkal.

10. Megnézzük összesen hányféle lehetne a sorrend a dobogón, és ebből levonjuk a nekünk rossz eseteket. Összesen lehet ugyebár $28 \cdot 27 \cdot 26$ dobogó sorrend, de kizárjuk, amikor **Y** az első és **X** a második, ami $1 \cdot 1 \cdot 26$ féleképp történhet. Így összesen $28 \cdot 27 \cdot 26 - 26 = 19630$ dobogó állás lehet.