Számítástudomány alapjai
1. gyakorlat, megoldások

1. A cukrászdában húszféle fagyi közül lehet választani. Hányféleképpen ehetünk három gombócot, ha esetleg többet is eszünk ugyanabból a fajtából és

   (a) tölcsérbe kérjük (a sorrend számít),

   (b) kehelybe kérjük (a sorrend nem számít)?

   (c) tölcsérbe kérjük és csak különbözőt veszünk?

   (d) kehelybe kérjük és csak különbözőt veszünk?

   Megoldás. A négy alapesetről van szó, $n = 20$ és $k = 3$ választással.

   (a) A sorrend számít, ismétlés lehet $\to 20^3$.

   (b) A sorrend nem számít, ismétlés lehet $\to \binom{20+3-1}{3} = \binom{22}{3}$.

   (c) A sorrend számít, ismétlés nem lehet $\to 20 \cdot 19 \cdot 18$.

   (d) A sorrend nem számít, ismétlés nem lehet $\to \binom{20}{3}$.

2. Egy budapesti, egy vidéki és egy külföldi barátunknak szeretnénk 2-2 képeslapot küldeni úgy, hogy senki ne kapjon két egyformát. Hányféleképp tehető ez meg, ha a boltban összesen 5-féle lap kapható?

   Megoldás. A budapestinek 5 lapból 2-t kell küldenünk, erre $\binom{5}{2}$ lehetőség van (a sorrend nem számít). Ugyanennyi lehetőség van a vidékinek illetve a külföldinek is; végül ezeket össze kell szorozni, mert egymástól függetlenül egyszerre bekövetkeznek. Így a végeredmény $\binom{5}{2}^3$.

3. Hányféleképpen festhetjük egy nyolcemeletes ház szintjeit fehérre, drappra és barnára, ha szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek?

   Megoldás. A nyolcemeletes úgy értendő, hogy 8 szintje van. Az első szint akármilyen színű lehet, ez 3 lehetőség. A második szint kétféle lehet, mert az elsőtől különböző színű (az, hogy melyik két szín, az függ az első emelet színétől, de az, hogy a színek száma kettő, nem). Hasonlóan a harmadik szint is kétféle színű lehet, és így tovább, összesen $3 \cdot 2^7$ lehetőség van.

4. (a) Egy évfolyam 50 lány és 40 fiú hallgatója négytagú küldöttséget választ, melyben legalább 1 lány és legalább két fiú kell szerepeljen. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

   (b) Anikó és Balázs éppen haragban állnak, ők nem akarnak egyszerre bekerülni. Így hány lehetőség van?

   Megoldás.

   (a) A feltétel szerint a küldöttségben vagy 3 fiú és 1 lány, vagy 2 fiú és 2 lány szerepel. Az előbbi esetben $\binom{40}{3} \cdot \binom{50}{1}$ van, hiszen a 40 fiú közül 3-at, az 50 lány közül 1-et kell kiválasztani egyszerre, függetlenül. A másik esetben $\binom{40}{2} \cdot \binom{50}{2}$ lehetőség van, így összesen $\binom{40}{3} \cdot \binom{50}{1} + \binom{40}{2} \cdot \binom{50}{2}$ (itt össze kell adni, mert egymást kizáró dolgokról van szó). Az a megoldás, hogy kiválasztok 1 lányt, 2 fiút, majd a maradékból még valakit, és így $\binom{50}{1} \cdot \binom{40}{2} \cdot \binom{87}{1}$ jön ki, nem jó, mert azokat az eseteket, amikor 2 lány van, kétszer számoljuk aszerint, hogy melyik lányt választjuk ki először (az 50-ből) és melyiket másodszor (87-ből), míg azokat az eseteket, amikor 1 lány (és 3 fiú) van, háromszor számoljuk.

   (b) Egy lehetőség, hogy az (a) rész eredményéből levonjuk a „rossz eseteket”, azaz amikor Anikó és Balázs is bekerülnek a küldöttségbe. Erre még mindig két módon kerülhet sor, hiszen a fiúk és lányok száma lehet 2-2 vagy 3-1. Előbbi esetben közülük 1-1 Balázs és Anikó, őket éppen nem kell számolni, hiszen itt nincs választási lehetőségünk, ők mindenképpen bekerülnek, így csak a maradék 1-1 tagot kell kiválasztani a maradék 49 lányból és 39 fiúból, erre $\binom{39}{1} \cdot \binom{49}{1}$ lehetőség van; a 3-1 esetben még két fiú kell, erre $\binom{39}{2}$ lehetőség van. Mindenestül a végeredmény $\binom{40}{3} \cdot \binom{50}{1} + \binom{40}{2} \cdot \binom{50}{2} - \binom{39}{1} \cdot \binom{49}{1} - \binom{39}{2}$. Úgy is össze lehet számolni, hogy azokat az eseteket vesszük külön, amikor csak Anikó, csak Balázs illetve egyikük sincs kiválasztva. 6 alapeset lesz: 3-1, 2-2, 3-1A, 2-2A, 3-1B, 2-2B (itt pl. 2-2A azt jelenti, hogy 2 fiú és 2 lány van, közöttük Anikóval). Így összeg alakban kapjuk a megoldást (ami egyébként ugyanannyi, mint a másik módon): $\binom{39}{3} \cdot \binom{49}{1} + \binom{39}{2} \cdot \binom{49}{2} + \binom{39}{3} + \binom{39}{2} \cdot \binom{49}{1} + \binom{39}{2} \cdot \binom{49}{1} + \binom{39}{1} \cdot \binom{49}{2}$

5. Hány olyan ötjegyű szám van, ami páros, és benne a jegyek összege is páros?

   Megoldás. Számoljuk meg, melyik helyiértéken hány jegy állhat. Ha nem lenne semmi megkötés, akkor $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ lehetőség lenne (az első helyen nem állhat 0), és valóban ennyi ötjegyű szám van. Ahhoz, hogy a szám páros legyen, az utolsó jegynek kell párosnak lenni, tehát ott 10 helyett csak 5 lehetőség lesz. Ahhoz, hogy a jegyek összege páros legyen, képzeljük el, hogy a jegyeket sorban választjuk, és megvan már az első három és az utolsó; ha ezeknek az összege páratlan, akkor az utolsó jegy is páratlan kell, hogy legyen, míg ha páros, akkor az utolsó jegy is páros. Mindenesetre az utolsó jegyre 5 lehetőség van (az, hogy melyik 5, függ a korábbi jegyek választásától, de az, hogy 5, nem), így az összes esetek száma $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5$. Ugyanez az okoskodás úgy nem működik, hogy a legnagyobb helyiértéken lévő jegyet hagyjuk utoljára, mert akkor nem ugyanannyi páros illetve páratlan jegy marad.

6. Hányféleképpen oszthatunk ki 13 különböző lapot úgy, hogy legalább 3 ász legyen köztük? (Egy pakli franciakártya 52 lapos, ebből 4 ász.)

   Megoldás. Vagy 3, vagy 4 ász van. Ha 3, akkor 4 ászból 3 és a maradék 48 lapból 10 kell, ez $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10}$ lehetőség, míg ha 4 ász van, $\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}$ lehetőségünk van, összesen $\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10} + \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}$.

7. Hányféleképp állhat egy sorba 4 lány és 4 fiú, ha felváltva kell állniuk? *Megoldás.* Az első helyre állhat 8 ember, a másodikra 4 (az ellenkező neműek valamelyike), a harmadikra 3 (ugyanolyan nemű kell, mint az első, de ilyenből már csak 3 van), és így tovább: $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$.

8. Kilenc egyforma cédula közül négyre egy-egy **A**-t írunk piros, kék, zöld illetve fekete tintával; a többin a **B**, **C**, **D**, **E**, **F** betűk találhatók feketével.

   (a) Hányféleképpen rakhatjuk a cédulákat sorba egymás után?

   (b) Szilárd, szegény, színvak; egyáltalán nem tudja megkülönböztetni a színeket. Hány olyan sorrendje van a céduláknak, amikor ő csak azt látja, hogy ABC szerint sorban vannak? És hány olyan, amikor csak a **BACADAEAF** sorrendet látja?

   (c) Hány sorrendet tud megkülönböztetni Szilárd?

   Megoldás.

   (a) 9!

   (b) Egy rögzített sorrendben az **A** betűk sorrendjét változtathatjuk, Szilárd ettől még ugyanannak látja. Az **A** betűk sorrendjére 4! lehetőség van, ennyi olyan sorrendje van tehát a céduláknak, amikor Szilárd **AAAABCDEF**-et lát. Hasonlóan ugyanennyi van, amikor **BACADAEAF** sorrendet lát.

   (c) Szilárd a sorrendeket 4!-osával ugyanannak látja, így 9! helyett csak $\frac{9!}{4!}$ sorrendet tud megkülönböztetni. Kicsit másképp: 9! sorrend van összesen, de ebben benne van az **A** betűk sorrendje is, amit „el kell felejtenünk”, ezért osztunk 4!-ral.

9. Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz 7 ember? (Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.)

   Megoldás. Jelöljünk ki egy embert; ő ül valahol az asztalnál. A baloldali szomszédja 6-féle lehet, attól balra még 5-féle ember ülhet, aztán már csak 4, és így tovább, ez 6! lehetőség lenne, de ebben minden esetet kétszer számoltunk, mert ha a kijelölt embertől kezdve pont fordítva ülnek, azt az ülésmódot ugyanannak tekintjük (bal és jobb oldali szomszéd nincs megkülönböztetve). Így még 2-vel osztani kell, a végeredmény $\frac{6!}{2}$.

10. Hányféleképpen oszthatunk egy 100 elemű halmazt három 20 elemű, két 15 elemű és egy 10 elemű részhalmazra?

    Megoldás. Válasszunk ki 20 elemet, ezek alkotják az első 20 elemű halmazt. Erre persze $\binom{100}{20}$ lehetőség van. A második 20 eleműt a maradék 80 elemből válogathatjuk, ez $\binom{80}{20}$ lehetőség, majd sorban $\binom{60}{20}$, $\binom{40}{15}$, $\binom{25}{15}$ és $\binom{10}{10}$ lehetőség van, amiket szorozni kell. De: hangsúlyoztam is, hogy első, második 20 elemű halmaz, pedig a feladat szerint nincs sorrendjük, így azt el kell felejtenünk, azaz osztani kell 3!-ral. Hasonlóan a 15 eleműek miatt osztani kell 2!-ral. Így a végeredmény:

    $\binom{100}{20} \cdot \binom{80}{20} \cdot \binom{60}{20} \cdot \binom{40}{15} \cdot \binom{25}{15} \cdot \binom{10}{10} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!}$.

11. Szeretnénk fényképet készíteni 20 különböző magasságú emberről úgy, hogy két 10-es sorba állnak egymás mögé úgy, hogy az első sorban állók mindegyike alacsonyabb, mint a mögötte álló. Hány különböző fényképet lehet így készíteni?

    Megoldás. Az egymás mögött álló párokat választjuk ki sorban. Válasszuk ki az első párt, erre $\binom{20}{2}$ lehetőségünk van, és őket csak egyféleképpen állíthatjuk oda az első két helyre (az alacsonyabbikat előre). A második párra $\binom{18}{2}$ lehetőség van, és így tovább, összesen $\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} \cdots \binom{2}{2}$.