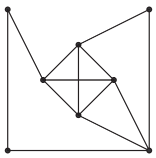
Számítástudomány alapjai
Próbazh második zh-hoz, megoldások
2006. tavasz

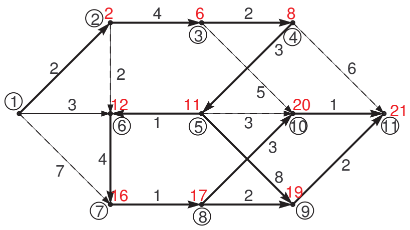
1. A G gráf kiszínezhető n színnel úgy, hogy minden egyes elhagyott élhez veszünk egy színt, és a két végpontját arra a színre színezzük. Így $\chi(G) \leq n$. Másrészt ha veszünk n csúcsot úgy, hogy minden egyes elhagyott él végpontjai közül egyet. Ezek klikket alkotnak, hiszen az eredeti teljes gráfban persze klikket alkotnak, és az abból elhagyott élek ezek közé nem kerülnek be (mindnek csak az egyik végpontja van itt). Így $\chi(G) \geq n$, tehát $\chi(G) = n$.

2. Ha G legalább 6-szorosan összefüggő, akkor minden fokszáma legalább 6. Márpedig tudjuk, hogy síkbarajzolható gráfnak van legfeljebb ötödfokú csúcsa, így egy előbbi gráf nem lehet síkbarajzolható.

3. A gráf nem síkbarajzolható; íme egy K_5-tel topologikusan izomorf részgráf. A középső négy csúcs K_4-et alkot, a jobb alsó csúcs kettővel közvetlenül össze van kötve, míg a másik kettővel a többi sarkon keresztül.



4. A csúcsokra írt bekarikázott számok a sorszámok, a karikázatlanok a szükséges idők. Az összes szükséges idő 21. A kritikus tevékenységeket vastag élek jelzik (a nem kritikusakat pedig a szaggatottak).



5. Nem áll elő. Az első sor egy olyan körhöz tartozik, ami az 1, 2, 3 éleket tartalmazza, a második sor pedig egy olyanhoz, ami az 1, 2, 4 éleket. Ez azt jelenti, hogy az 1, 2 élek egyik végpontja közös, és a másik két végpontjuk között fut a 3 és 4 él is, azaz azok többszörös élet alkotnak. Akkor viszont a körmátrixban meg kellene jelennie egy (0,0,1,1) sornak is, mert a 3-as és 4-es él kört alkot. Viszont ilyen sor nincs a mátrixban, tehát ez nem egy gráf körmátrixa.

6. NP-teljes. A tanú egy ilyen kör. A Hamilton-kör problémát vezetjük vissza erre. Legyen G egy gráf, amiben Hamilton-kör a kérdés; legyen a mostani probléma bemenete a G gráf és $S = V(G)$, az összes csúcs. G-ben egy olyan kör, ami az összes S-beli csúcsot tartalmazza, éppen egy Hamilton-kör, tehát a két kérdésre pontosan ugyanakkor igen a válasz.

7. P-beli. Tekintsük a G gráfnak az S-beli csúcsokon kifeszített részgráfját (azaz vegyük az S-beli csúcsokon az összes olyan élet, ami két S-beli között fut). A kérdés az, van-e ebben a gráfban kör. Ez polinom időben eldönthető, például úgy, hogy bejárunk minden komponenst, majd megnézzük, kimaradt-e él. (És ennek a gráfnak a mérete kisebb az eredetiénél, így annak méretében is polinom idejű az algoritmus.)

8. Ez nem kell a mostani zh-ra! Azért itt a megoldás.

$$12x \equiv 35^{81} \cdot 18^2 \pmod{44}$$

$(12, 44) = 4 | 35^{81} \cdot 18^2$, így mindhárom tagot leosztjuk 4-gyel. $(35^{81} \cdot 18^2/4 = 35^{81} \cdot 9^2)$

$$3x \equiv 35^{81} \cdot 9^2 \pmod{11}$$

A jobboldalon álló számot egyszerűsítjük. $35 \equiv 2 \pmod{11}$, és $(35, 11) = 1$ miatt a kitevőt is redukálhatjuk. $\varphi(11) = 10$, $81 \equiv 1 \pmod{10}$, azaz

$$3x \equiv 2^1 \cdot 9^2 \equiv 2 \cdot 81 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{11}.$$

A $8, 19, 30, 41, \dots$ számok közül a 30 osztható 3-mal, innen a megoldás

$$x \equiv 10 \pmod{11},$$

visszaírva az eredeti kongruenciába:

$$x \equiv 10, 21, 32, 43 \pmod{44}.$$