Ramsey típusú tételek és feladatok

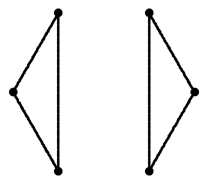
Tóth Géza
MTA Rényi Matematikai Intézet
és Massachusetts Institute of Technology

1 Ramsey tétele gráfokra

Középiskolai matematikai versenyek közismert feladata a következő.

1.1 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy hat ember között mindig van három olyan akik ismerik egymást, vagy három olyan akik nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönösnek tételezzük föl.)*

A bizonyítás nem nehéz. Legyen A az egyik ember. A maradék öt ember közül A vagy legalább hármat ismer, vagy legalább hármat nem ismer. Tegyük fel hogy három embert ismer, B-t, C-t es D-t (a másik eset ugyanígy elintézhető). Ha e három ember közül bármelyik kettő ismeri egymást, akkor A-val együtt megvan a három egymást ismerő ember. Ha pedig B, C es D közül semelyik kettő sem ismeri egymást, akkor éppen ők alkotják a keresett hármast.



1. Ábra. *Nincs teljes négyes és nincs három független csúcs.*

Vajon igaz marad-e az állítás, ha három helyett *négy* egymást ismerő vagy egymást nem ismerő embert akarunk találni? Az 1-es ábra mutatja hogy nem. A pontok jelentik az embereket es két ember pontosan akkor ismeri egymást, ha a megfelelő pontok össze vannak kötve. Nem található az ábrán négy pont úgy hogy köztük mind a hat él be van húzva, és nincs négy olyan pont sem amelyek között egyáltalán nincs él (sőt, még három sem!). Ha viszont hat helyett sokkal több, mondjuk száz embert tekintünk, akkor újra igaz állítást kapunk.

1.2 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy száz ember között mindig van négy olyan akik ismerik egymást vagy négy olyan akik nem ismerik egymást.*

Ezekben a feladatokban a mi szempontunkból az egyetlen érdekes informació az emberekről az, hogy melyik kettő ismeri egymást és melyik kettő nem. Tehát tetszőleges száz tagú társaságot leírhatunk az ismerős párok felsorolásával. Ez éppen az egyszerű gráf definíciója.

Definíció. Legyen V egy véges halmaz, E pedig V elemeiből alkotott párok egy halmaza. A $G = (V, E)$ párt *egyszerű gráfnak* hívjuk, V elemei a gráf csúcsai, E elemei pedig a gráf élei.

Egy gráfot sok esetben érdemes lerajzolni, ahogy az 1-es ábrán is tettük, a csúcsokat pontokkal reprezentáljuk, és két pontot pontosan akkor kötünk össze ha a megfelelő két csúcs egy élet alkot a gráfban. Teljes gráfnak nevezzük azt a gráfot amelynek bármely két csúcsa össze van kötve. Egy $G = (V, E)$ gráfnak $G' = (V', E')$ a részgráfja, ha $V' \subset V$ és $E' \subset E$, vagyis G' minden csúcsa (éle) G-nak is csúcsa (éle). Egy $G = (V, E)$ gráfban $V' \subset V$ csúcsai független halmazt alkotnak, ha nem fut közöttük él G-ben.

Ezzel a terminológiával az 1.1-es feladat állítása azt mondja ki hogy minden hat csúcsú gráf tartalmaz egy három csúcsú teljes részgráfot vagy független halmazt.

Legyen $R(k, l)$ az a legkisebb R szám amelyre igaz, hogy bármely R csúcsú gráf tartalmaz egy k csúcsú teljes részgráfot vagy egy l csúcsú független halmazt. (Ha nem létezne ilyen R, legyen $R(k, l) = \infty$.) A 1.2-es feladat állítása szerint $R(4, 4) \leq 100$. Ramsey híres tétele szerint $R(k, l)$ véges minden k, $l \geq 2$ esetén. Más szóval, még a legnagyobb rendetlenségben is találunk egy kis rendet. Hogy pontosan mekkorát, arra a következő eredmény ad becslést.

1.3 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy minden* $k, l \geq 2$*-re* (i) $R(k, 2) = k$ (ii) $R(2, l) = l$ (iii) $R(k + 1, l + 1) \leq R(k + 1, l) + R(k, l + 1)$.

Bizonyítás: (i) Ha egy k csúcsú gráf teljes, akkor természetesen tartalmaz egy k csúcsú teljes részgráfot, ha nem teljes, akkor van két pontú független halmaz. A teljes $k - 1$ csúcsú gráf viszont nem tartalmaz se k csúcsú teljeset, se két független pontot. (ii) Ha egy l csúcsú gráfnak nincs egyáltalán éle, akkor tartalmaz egy k csúcsú független halmazt, ha viszont van éle, akkor van két pontú teljes részgráf. A $k - 1$ csúcsú él nélküli gráf pedig nem tartalmaz se két csúcsú teljeset, se k független pontot. (iii) A bizonyítás ötlete ugyanaz mint az 1.1-es feladat esetén. Legyen G egy $R(k+1, l) + R(k, l+1)$ csúcsú gráf és legyen v az egyik csúcsa. Ezen kívül még $R(k + 1, l) + R(k, l + 1) - 1$ csúcs van, tehát vagy van $R(k + 1, l)$ csúcs amelyekkel össze van kötve v, vagy van $R(k, l + 1)$ csúcs amelyekkel nincs összekötve v. Tegyük fel hogy az első eset áll fent, vagyis van v-nek $R(k + 1, l)$ szomszédja. R definíciója szerint a szomszédok között találhatunk vagy egy teljes $k - 1$ csúcsú részgráfot, ekkor ez v-vel kiegészítve eppen egy k csúcsú teljes részgráfot ad, vagy egy l csúcsú független halmazt, ekkor azonnal készen vagyunk. A másik esetben, ha v-nek $R(k,l+1)$ nem-szomszédja van, hasonlóan fejezhetjük be a bizonyítast.

Ebből azonnal következik indukcióval hogy $R(k,l) \leq 2^{k+l}$, sőt, valamivel jobb korlát adódik, de itt nem térünk ki a részletekre, csak néhány speciális esetre.

1.4 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy* $R(k,3) \leq \frac{k(k+1)}{2}$.

1.5 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy az 1.1 feladatban a korlát nem javítható, azaz* $R(3,3) = 6$.

1.6 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy* $R(3,4) = 9$.

Segítség: Az 1.4 feladat alapjan $R(3,4) \leq 10$, ezt a felső korlátot eggyel kell megjavítani, egy kis esetszétválasztással. Az alsó korláthoz kell mutatni egy nyolc pontú gráfot, amely nem tartalmaz se háromszöget (három pontú teljes részgráfot) se négy független pontot. Tekintsünk egy szabályos nyolcszöget, és ennek bizonyos húrjait. A húrok felelnek meg a konstruálandó gráf csúcsainak, két csúcsot összekötünk egy éllel, ha a megfelelő húroknak van közös pontja (közös csúcs vagy metszéspont). Megfelelő nyolc húr választásával éppen a kívánt gráfot kapjuk. (Még egy kis segítség: legyenek a húrok egyforma hosszúak.)

Megemlítjük a Ramsey tételnek egy általánosabb változatát is.

Általános Ramsey tétel gráfokra. *Tetszőleges* $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 2$ *számokra létezik olyan* R *szám hogy bármely* R *csúcsú teljes gráf amelynek az élei* m *színnel vannak színezve, valamilyen* $1 \leq i \leq m$*-re tartalmaz egy* k_i *csúcsú teljes részgráfot amelynek az összes éle az* i*-edik színnel van színezve.*

A feltételt kielégítő legkisebb R számot $R(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-rel jelöljük. A bizonyítast nem nehéz rekonstruálni az alábbi feladat általánosításával.

1.7 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy minden* $k \geq 2$*-re*
(i) $R(2,2,k) = R(2,k,2) = R(k,2,2) = k$.
(ii) $R(k,l,2) = R(k,2,l) = R(2,k,l) = R(k,l)$.
(iii) $R(k_1,k_2,k_3) \leq R(k_1-1,k_2,k_3) + R(k_1,k_2-1,k_3) + R(k_1,k_2,k_3-1) - 1$.
(iv) $R(k_1,k_2,k_3) \leq 3^{k_1+k_2+k_3}$.

1.8 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy* $R(3,3,3) \leq 17$.

Vegül egy még általánosabb változata a Ramsey tételnek. Eddig "él" alatt csúcsok egy párját értettünk, vagyis egy él két csúcsot köt össze. Az r-uniform hipergráfban egy él egy csúcs r-est jelent.

Definíció. Legyen V egy véges halmaz, E pedig V elemeiből alkotott r-esek egy halmaza. A $H = (V,E)$ párt *r-uniform hipergráfnak* hívjuk, V elemei a hipergráf csúcsai, E elemei pedig a gráf hiperélei.

Általános Ramsey tétel uniform hipergráfokra. *Tetszőleges* $r \geq 2$, $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq r$ *számokra létezik olyan* R *szám hogy bármely* R *csúcsú teljes* r*-uniform hipergráf amelynek az élei* m *színnel vannak színezve, valamilyen* $1 \leq i \leq m$*-re tartalmaz egy* k_i *csúcsú teljes rész-hipergráfot amelynek az összes éle az* i*-edik színnel van színezve.*

A feltételt kielégítő legkisebb R számot $R_r(k_1, k_2, \ldots, k_m)$-rel jelöljük.

A bizonyításra itt sem térünk ki, hasonló mint az 1.3 és 1.7 feladatok megoldása, csak jóval bonyolultabb. Nézzünk csak egy speciális esetet.

1.9 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy* $R_3(4,4)$ *véges.*

Segítség: Bizonyítsuk be hogy $R_3(4,4) \leq R(3,4) + 1 = 10$. Tekintsünk egy tíz csúcsú 3-uniform H hipergráfot, be akarjuk bizonyítani hogy vagy van négy csúcs amelyek között minden hármas szerepel, vagy van négy csúcs amelyek között egyik hármas sem szerepel. Legyen v egy tetszőleges csúcs. A maradék kilenc ponton definiáljunk egy G gráfot a következő szabállyal. Két csúcs, u es w össze van kötve G-ben akkor és csak akkor ha uvw H éle. G tartalmaz vagy egy teljes négyest, vagy egy üres hármast. A többit az olvasóra bízzuk.

1.10 Feladat. *Legyen* G *egy megszámlálható végtelen teljes gráf amelynek csúcsai* $v_1, v_2, \ldots = \{v_i \mid i \geq 0$ *egész*$\}$.
(i) *Színezzük ki* G *éleit két színnel. Bizonyítsuk be hogy található akármilyen nagy teljes egyszínű részgráf, azaz tetszőleges* N*-re vannak olyan* $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_N}$ *csúcsok amelyek közötti összes él ugyanolyan színű.*
(ii) *Bizonyítsuk be hogy található vegtelen sok csúcsú teljes egyszínű részgráf, azaz vannak olyan* $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots$ *csúcsok amelyek közötti összes él ugyanolyan színű.*
(iii) *Bizonyítsuk be hogy* (i) *és* (ii) *állítása igaz marad akkor is ha kettő helyett tetszőleges* $r \geq 2$ *színnel színezünk.*

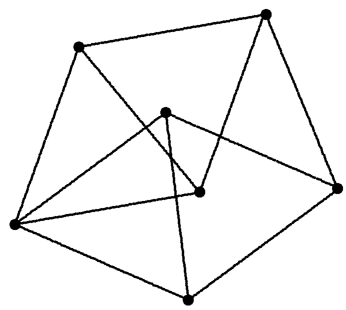
Segítség: (i), (iii) Közvetlenül következik a véges Ramsey tételből. (ii), (iii) Egy észrevételre van szükség, hogy végtelen sok, véges sok színnel színezett él között mindig található végtelen sok ugyanolyan színű. Ennek és a véges Ramsey tétel bizonyításának alapján már nem nehéz bebizonyítani az állítást.

2 Euklideszi Ramsey elmélet

A Ramsey elmélet egyik szép, geometriai vonatkozású ága az Euklideszi Ramsey elmélet, amelyet elsősorban Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer es Straus alapoztak meg egy 1975-os cikksorozatukkal. Az általános kérdés a következő: Egy véges dimenziós euklideszi tér pontjait kiszínezzük véges sok színnel (minden pont egy színt kap) es bizonyos követelményeknek eleget tevő egyszínű konfigurációkat keresünk. A leghíresebb kérdés a máig megoldatlan Hadwiger-Nelson probléma: Hány színre van szükség ha úgy akarjuk kiszínezni a sík pontjait, hogy ne legyen két egységnyi távolságra levő pont ugyanolyan színű. A feladat külön érdekessége, hogy a legjobb ismert alsó és felső korlát bizonyítása egyaránt nagyon egyszerű.

2.1 Feladat. (i) (Nelson 1950) *Bizonyítsuk be hogy három színnel színezve a síkot mindig található két egyszínű pont egymástól egységnyi távolságra.*
(ii) (Isbell 1950) *Mutassunk olyan színezését a síknak hét színnel, amelyben bármely két egységnyi távolságra levő pont különböző színű.*

Segítség: (i) Elég a 2-es ábrán láthato *Moser gráf* csúcsait tekinteni. (ii) Rakjuk ki a síkot egybevágó szabályos hatszögekkel, amelyeknek az átmérője valamivel kevesebb mint egy. Minden hatszöget kiszínezünk a hét szín valamelyikevel. Egy hatszögon belül nincs két pont egységtávolságra, és a színek megfelelő (periodikus) választása esetén két egyforma színű hatszög egységnyinél messzebb lesz egymástól.



2. Ábra. *Moser gráf: minden él hossza 1.*

Természetesen vizsgálták a kérdést magasabb dimenzióban is. A térben a legjobb ismert korlátok 6 (Nechushtan 2000) illetve 15 (Radoičić, Tóth 2000), de ezek bizonyítása már nem olyan könnyű mint a síkbeli legjobb korlátoké. Viszont valamivel gyengébb korlátokat könnyű bizonyítani (néhány éve még ezek voltak a legjobb ismert korlátok).

2.2 Feladat. (i) (Raiskii 1970) *Bizonyítsuk be hogy négy színnel színezve a teret mindig található két egyszínű pont egymástól egységnyi távolságra.*
(ii) (Székely, Wormald 1989) *Mutassunk olyan színezését a térnek* 21 *színnel, amelyben bármely két egységnyi távolságra levő pont különböző színű.*

Segítség: (i) Általánosítsuk a Moser gráfot a tér esetére, szabályos háromszögek helyett tekintsünk szabályos tetraédereket. Egy kilenc pontú konfigurációt kapunk, 19 egységtávolsággal a pontok között. (ii) Tekintsük a 2.1-es feladatban kapott színezést, és egészítsük ki a hatszögeket hatszög alapú egyenes hasábokká. Így megkapjuk egy "réteg" színezését, hét színnel. A következő réteget színezzük másik hét színnel, az az utánit a harmadik hét színnel. Ezután már használhatjuk az első hét színt, ha a rétegeket megfelelő vastagságúnak választottuk.

Általában a d-dimenziós tér esetén a legjobb ismert alsó korlát, 1.2^d, Frankl es Wilson (1981) híres eredménye. Larman es Rogers (1972) pedig megmutatták hogy valamivel több mint 3^d szín elegendő.

2.3 Feladat. (i) *Bizonyítsuk be hogy a d-dimenziós teret $d+1$ színnel színezve mindig található két egyszínű pont egymastól egységnyi távolságra.*
(ii) *Legyen $d \geq 3$. Mutassunk olyan színezését a d-dimenziós térnek d^d színnel, amelyben bármely két egységnyi távolságra levő pont különböző színű.*

Segítség: A megoldás nagyon hasonló az előző két feladat megoldásához. (i) Általánosítsuk a Moser gráfot a d-dimenziós tér esetére, szabályos háromszögek illetve teraéderek helyett tekintsünk szabályos egységnyi oldalú szimplexeket. (ii) Tekintsünk egy d-dimenziós egységoldalú kockarácsot. Minden kocka megfelel egy $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ egész szám d-esnek. A színeket is egész szám d-eseknek feleltetjük meg, minden szín egy $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ d-es, ahol $0 \leq y_i \leq d-1$. Ez éppen d^d szín. Vegül az $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ kocka pontjainak a színe legyen $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ ha minden i-re $x_i \equiv y_i \pmod{d}$. Könnyen belátható hogy nincs két egyszínű pont egymástól $\sqrt{d}+\varepsilon$ távolságra, megfelelő kicsinyítéssel elerhetjük hogy éppen ez legyen az egységtávolság.

Egy aszimmetrikus változata a Hadwiger-Nelson problémának a következő. Színezzük ki a sík pontjait pirossal és kékkel és tegyük föl hogy nincs két piros pont egymástól egységnyi távolságra. Ez valamilyen értelemben azt jelenti hogy nem lehet "túl sok" pont piros. Milyen egyszínű kék konfigurációkat találhatunk? Példaul a fentiek alapján nyilván van két kék pont egymástól egységnyi távolságra. Elég egy egységnyi oldalú szabályos háromszög csúcsait tekinteni.

2.4 Feladat. *Színezzuk ki a sík pontjait pirossal es kékkel úgy hogy nincs két piros pont egymástól egységnyi távolságra. Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be hogy van egy T-vel egybevágó háromszög amelynek mind a három csúcsa kék.*

Segítség: Könnyebb bebizonyítani az állítást ha T valamelyik oldala legfeljebb 2. Az általános esetben legyen a T egyik oldalának a hossza, és különböztessünk meg két esetet: van két piros pont egymastól a távolságra, illetve nincs.

Juhász Rozália (1979) bebizonyította hogy az állítás háromszögek helyett négyszögekre is igaz. Vajon igaz az állítás négy helyett több csúcsú konfigurációkra is? Erdős es társszerzői az említett cikksorozatukban megmutatták hogy az állítás nem igaz minden 10^{12} pontú konfigurációra!

2.5 Feladat. *Mutassunk egy olyan piros-kék színezését a síknak és egy olyan K véges pont-konfigurációt hogy nincs két piros pont egymástól egységnyi távolságra és nincs K-val egybevágó konfiguráció, amelynek minden pontja kék.*

Segítség: Legyen K egy megfelelő méretű négyzetrács megfelelő reszlete.

Sikerült kevesebb mint 10^{12} csúcsú példát találni? Gratulálunk! Ez már Juhász Rozáliának is sikerült, ő egy 12 pontú példát (és egy megfelelő színezést) talált. Ezt tovább javítottuk Csizmadia Györggyel (1994), egy nyolc pontú példával. Az viszont máig nem ismert, hogy mi az igazság öt-, hat-, és hétszögekre.

2.6 Feladat. *Mutassunk olyan színezését a síknak két színnel, amelyben nem található olyan egységnyi oldalú szabályos háromszög amelynek mind a három csúcsa ugyanolyan színű.*

Segítség: Gondoljunk a zebrára.

2.7 Feladat. (i) *Legyen T egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Mutassunk olyan színezését a síknak három színnel, amelyben nem található egy T-vel egybevágó háromszög amelynek mind a három csúcsa ugyanolyan színű.*
(ii) *Színezzük ki a sík pontjait két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy T-hez hasonló háromszög amelynek mind a három csúcsa ugyanolyan színű.*
(iii) *Színezzük ki a sík pontjait két színnel. Bizonyítsuk be, hogy található három egyszínű pont, A, B és C úgy, hogy B az AC szakasz felezőpontja.*

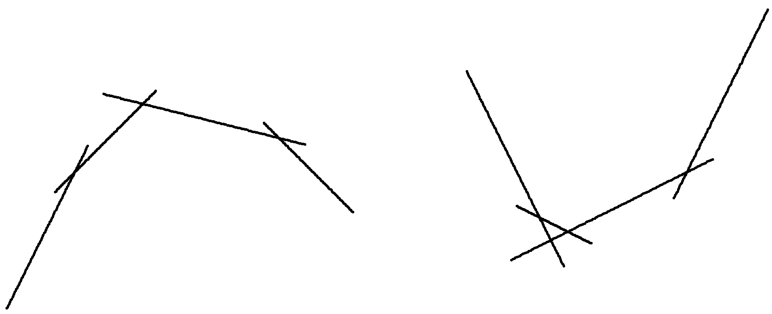
2.8 Feladat. *Legyen T egy tetszőleges háromszög. Bizonyítsuk be, hogy van olyan színezése a síknak hét színnel, amelyben nem található olyan T-vel egybevágó háromszög amelynek mind a három csúcsa ugyanolyan színű.*

3 Az Erdős-Szekeres tétel

A következő feladatok szorosan kapcsolódnak Pach János kiváló cikkéhez az Erdős-Szekeres tételről, ugyanebben a kötetben, így ezt a fejezetet az említett cikk után érdemes elolvasni.

3.1 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy öt általános helyzetű pont között a síkon mindig van négy amelyek konvex helyzetben vannak és az ötödik pont nincs a konvex burkukban.*

3.2 Feladat. *Azt mondjuk hogy k egyenes konvex helyzetben van, ha egy konvex k-szög oldalegyenesei. Bizonyítsuk be hogy minden $n \geq 3$ egészhez van olyan $\bar{f}(n)$ szám amelyre igaz a következő feltétel. Tetszőleges $\bar{f}(n)$ átlalános helyzetű egyenes (nem megy át három egy ponton) között a síkon található n konvex helyzetben.*



3. Ábra. *Hegy és völgy.*

Segítség: Hasonlóan mint az Erdős-Szekeres tétel bizonyításában, definiálhatjuk a *hegy* és *völgy* fogalmát (3-as ábra). Ezek után definiálhatjuk az $\bar{f}(k,l)$ függvényeket, és ugyanazt a rekurziót bebizonyíthatjuk, mint ami az eredeti Erdős-Szekeres tétel bizonyításában szerepel az $f(k,l)$ függvényre. Az egyetlen különbség az, hogy az eredeti bizonyításban egy olyan pontot kerestünk, ami egyszerre egy hegy *utolsó* és egy völgy *első* eleme. Itt viszont olyan egyenest kell találnunk, amely egyszerre *első* eleme egy hegynek is és egy völgynek is.

3.3 Feladat. (i) *Bizonyítsuk be hogy minden $n \geq 3$ egészhez van olyan $h(n)$ szám amelyre igaz a következő feltétel. Tetszőleges $h(n)$ átlalános helyzetű pont között a síkon vagy van n konvex helyzetben úgy hogy bármely két pont távolsága legfeljebb egy, vagy van n konvex helyzetben úgy hogy bármely két pont távolsága legalább egy.*
(ii) *Bizonyítsuk be hogy minden $n \geq 3$ egészhez van olyan $h'(n)$ szám amelyre igaz a következő feltétel. Tetszőleges $h'(n)$ átlalános helyzetű pont között a síkon vagy van n konvex helyzetben úgy hogy bármely két pont távolsága legfeljebb egy, vagy van n konvex helyzetben úgy hogy bármely két pont távolsága legalább* 2.

Segítség: (i) Használjuk először a Ramsey tételt, utána pedig az Erdős-Szekeres tételt. Színezzük ki a pontok közotti éleket két színnel, pirossal ha a két pont messzebb van mint 1, kékkel ha közelebb. (Ha éppen 1 a távolság, akkor bármelyik színt használhatjuk.) Ha elég sok pontból indulunk ki, lesz egy nagy részhalmaz, ahol az összes él ugyanolyan színű. Ezekre a pontokra alkalmazzuk az Erdős-Szekeres tételt. (ii) Most színezzük ki a pontok közötti éleket három színnel, pirossal ha a két pont messzebb van mint 2, kékkel ha közelebb mint 1, és zölddel ha a távolság 1 és 2 között van. Ha elég sok pontból indulunk ki, lesz egy nagy részhalmaz, ahol az összes él ugyanolyan színű. Ha ez a szín piros vagy kék, akkor ezekre a pontokra alkalmazzuk az Erdős-Szekeres tételt. A zöld esetet azzal az észrevétellel zárhatjuk ki, hogy nem lehet 25-nél több pont úgy, hogy az összes köztük futó él zöld.

Megjegyezzük, hogy a feladatban a 2 helyére tetszőleges számot írhatunk.

3.4 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy hat általános helyzetű pont között a térben mindig van öt amelyek konvex helyzetben vannak.*

3.5 Feladat. *Bizonyítsuk be hogy minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* N *hogy* N *pont között a síkon mindig található három, amelyek egy* π *és* $\pi - \varepsilon$ *közötti szöget határoznak meg.*

Segítség: Ha van három pont egy egyenesen akkor készen vagyunk. Ha a pontok általános helyzetben vannak, akkor elég nagy N esetén található $n \geq \frac{2\pi}{\varepsilon}$ pont konvex helyzetben. Ennek a konvex sokszögnek valamelyik három szomszédos csúcsa eleget tesz a feltételnek.