Bevezetés a Számításelméletbe 1. 2011. november 5.
Kurzus: 22

9. gyakorlat
Lineáris leképezések

1. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

2. Határozzuk meg minden x értékre az alábbi mátrix rangját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

3. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkbeli vektorok vektortere. Lineáris leképezés-e $\mathcal{A} : V \to V$ ha minden $v \in V$ vektorra

a) $\mathcal{A}(v)$: a v-nek az x tengelyre vett tükörképe?

b) $\mathcal{A}(v)$: az az x tengelyre eső vektor, amelynek első koordinátája a v koordinátáinak összege?

c) $\mathcal{A}(v)$: az az x tengelyre eső vektor, amelynek első koordinátája a v koordinátái közül a kisebb?

d) $\mathcal{A}(v)$: nullvektor.

4. Lineáris leképezések-e az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ hozzárendelések?

a) $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ zy \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ z + y \end{pmatrix}$

5. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írja fel az alábbi $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképzések mátrixát a szokásos $\{(1,0),(0,1)\}$ bázisban!
   a) az y tengelyre való tükrözés;
   b) az origó körüli $+60°$-os forgatás;
   c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$-os forgatás.

6. A sík milyen lineáris leképezéseihez tartoznak az alábbi mátrixok?

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad d)\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad g)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad h)\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

7. Írja fel az előző feladat transzformációit az $(1,1)$ és $(1,-1)$ vektorokból álló bázisban!

8. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy a $v = (2,2)$ vektorhoz a $(4,-4)$ vektort, a $w = (1,3)$ vektorhoz pedig a $(-2,1)$ vektort rendeli. Mi lesz az $u = (5,9)$ vektor képe?

9. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy a $v = (1,2)$ vektorhoz a $(2,3)$ vektort, a $w = (-1,2)$ vektorhoz pedig a $(4,5)$ vektort rendeli. Írja fel $\mathcal{A}$ mátrixát

   a) a szokásos (azaz az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorokból álló) bázisban;

   b) a v és w vektorokból álló bázisban!

10. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy a $v = (1,0)$ vektorhoz a $v' = (a,b)$ vektort, a $w = (0,1)$ vektorhoz pedig a $w' = (c,d)$ vektort rendeli. Írja fel $\mathcal{A}$ mátrixát

    a) a v és w vektorokból álló bázisban;

    b) a v' és w' vektorokból álló bázisban (ha ez bázis)!